Ministerul Educaţiei Naţionale
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Matematika tantárgyverseny
Megyei szakasz, 2013. március 9.

IX. OSZTÁLY

1. feladat

a) Bizonyítsd be, hogy bármely x valós szám esetén igaz az

$$x^4 - x^3 - x + 1 \geq 0$$

egyenlőtlenség!

b) Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 \end{cases} .$$

Gazeta Matematică

2. feladat. Adott az ABC háromszög. Vegyük fel a háromszög oldalain a $D, E \in (BC)$, $F, G \in (CA)$, $H, I \in (AB)$ pontokat úgy, hogy $BD = CE$, $CF = AG$ és $AH = BI$. Legyenek M, N és P a $[GH]$, $[DI]$ illetve $[EF]$ szakaszok felezőpontjai, M' pedig az AM és BC egyenesek metszéspontja.

a) Igazold, hogy

$$\frac{BM'}{CM'} = \frac{AG}{AH} \cdot \frac{AB}{AC} .$$

b) Igazold, hogy az AM, BN és CP egyenesek összefutók!

3. feladat. A nullától különböző n természetes számra $a_1, a_2, \ldots, a_n$ olyan valós számok, amelyekre fennáll az $a_1 + a_2 + \ldots + a_k \leq k$ egyenlőtlenség bármely $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ esetén. Igazold, hogy:

$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \ldots + \frac{a_n}{n} \leq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} .$$

4. feladat. Kezdetben egy papírlapon különböző természetes számok listája szerepel. A *listát folytatni* azt jelenti, hogy kiválasztunk két különböző számot a listából, és felírjuk a legkisebb közös többszörösüket is, ha az már nem szerepel a listában. A lista *bezárul*, ha nem folytatható (például a 2, 3, 4, 6 lista a 12 hozzáadása után bezárul). Ha egy lista kezdetben 10 darab számot tartalmaz, akkor legfeljebb hányat tartalmazhat miután bezárul?

Munkaidő 4 óra.
Minden feladatra 7 pont szerezhető.

Ministerul Educaţiei Naţionale
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 9 Martie 2013

CLASA a IX-a

Problema 1. a) Demonstraţi că, oricare ar fi numărul real x, are loc inegalitatea

$$x^4 - x^3 - x + 1 \geq 0.$$

b) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale sistemul

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 \end{cases}.$$

Gazeta Matematică

Problema 2. Se consideră triunghiul ABC şi punctele $D, E \in (BC)$, $F, G \in (CA)$, $H, I \in (AB)$ astfel încât $BD = CE$, $CF = AG$ şi $AH = BI$. Notăm cu M, N, P mijloacele segmentelor $[GH]$, $[DI]$, respectiv $[EF]$ şi cu M' intersecţia dreptelor AM şi BC.

a) Arătaţi că

$$\frac{BM'}{CM'} = \frac{AG}{AH} \cdot \frac{AB}{AC}.$$

b) Arătaţi că dreptele AM, BN şi CP sunt concurente.

Problema 3. Fie n un număr natural nenul şi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale astfel încât $a_1 + a_2 + \ldots + a_k \leq k$, oricare ar fi $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Arătaţi că

$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \ldots + \frac{a_n}{n} \leq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Problema 4. Pe o hârtie este scrisă la început o listă de numere naturale distincte. O *continuare a listei* înseamnă alegerea a două numere dintre cele existente şi scrierea pe listă a celui mai mic multiplu comun al acestora, cu condiţia ca el să nu fie deja scris. Spunem că lista *s-a închis* dacă nu mai există nicio continuare posibilă a sa (de exemplu, lista 2, 3, 4, 6 se închide după ce-l adăugăm pe 12). Care este numărul maxim de numere care pot apărea pe o listă care s-a închis, dacă la început lista conţinea 10 numere?

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.