INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN DÂMBOVIŢA **SSMR DÂMBOVIŢA**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 28.02.2015
CLASA a VII-a

SUBIECTUL 1

Se consideră mulţimile : A = $\left\{x \in Q \mid x = \frac{3n+2}{2n+1}, n \in Z\right\}$ **si**

B = $\left\{y \in Q \mid y = \frac{5m+3}{5m+1}, m \in Z\right\}$**. Determinaţi elementele multimii A ∩ B.**

G.M 2014

SUBIECTUL 2

Calculaţi x + y + z ştiind că $\frac{x}{x+1} = \frac{y}{y+2} = \frac{z}{z+3}$ **şi** $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 54$.

G.M 2014

SUBIECTUL 3

În patrulaterul ABCD, m(∢A) = m(∢C) = 90^0 şi AB = AD. Dacă AM ⊥ BC, cu M ∈ (BC), arătaţi că $\mathcal{A}_{[ABCD]} = AM^2$.

R.M.T

SUBIECTUL 4

În paralelogramul ABCD, AC∩BD = {O}, M este mijlocul laturii [BC]. Prin O se construieşte NP || DM, N ∈ (AD), P ∈ (BC). Dacă AM∩NP = {Q} şi CQ∩AB = {R}, arătaţi că rapoartele $\frac{AR}{AB}$ **si** $\frac{QR}{QC}$ **au aceeaşi valoare şi determinaţi această valoare.**

Prof. Damian Marinescu

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.
Timp de lucru: 3 ore.

CLASA a VII-a

SUBIECTUL 1 **Se consideră mulţimile:** $A = \left\{ x \in \mathbb{Q} \mid x = \dfrac{3n+2}{2n+1},\ n \in \mathbb{Z} \right\}$ **şi**

$B = \left\{ y \in \mathbb{Q} \mid y = \dfrac{5m+3}{3m+1},\ m \in \mathbb{Z} \right\}$**. Determinaţi elementele mulţimii** $A \cap B$**.**

Dacă $z \in A \cap B$, atunci există n şi m numere întregi, astfel încât $\dfrac{3n+2}{2n+1} = \dfrac{5m+3}{3m+1}$.	**2p**
Se obţine $n = \dfrac{m-1}{m+3} = 1 - \dfrac{4}{m+3}$.	**2p**
Cum $n \in \mathbb{Z}$, rezultă $\dfrac{4}{m+3} \in \mathbb{Z}$, de unde $m \in \{-7; -5; -4; -2; -1; 1\}$.	**2p**
Rezultă $A \cap B = \left\{ \dfrac{8}{5}; \dfrac{11}{7}; \dfrac{17}{11}; \dfrac{7}{5}; 1; 2 \right\}$.	**1p**

SUBIECTUL 2 **Calculaţi x + y + z, ştiind că:** $\dfrac{x}{x+1} = \dfrac{y}{y+2} = \dfrac{z}{z+3}$ **şi** $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y} + \dfrac{3}{z} = 54$ **.**

VARIANTA 1 DE NOTARE

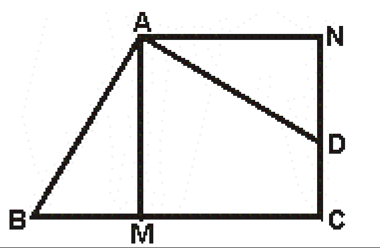
Egalitatea $\dfrac{x}{x+1} = \dfrac{y}{y+2} = \dfrac{z}{z+3}$ implică $\dfrac{x+1}{x} = \dfrac{y+2}{y} = \dfrac{z+3}{z}$.	**1p**
De unde $1 + \dfrac{1}{x} = 1 + \dfrac{2}{y} = 1 + \dfrac{3}{z}$.	**1p**
Şi atunci $\dfrac{1}{x} = \dfrac{2}{y} = \dfrac{3}{z}$.	**1p**
Cu $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y} + \dfrac{3}{z} = 54$, se obţine $\dfrac{3}{x} = 54$ şi $x = \dfrac{1}{18}$.	**2p**
$y = \dfrac{1}{9}$ şi $z = \dfrac{1}{6}$.	**1p**
$x + y + z = \dfrac{1}{18} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3}$.	**1p**

VARIANTA 2 DE NOTARE

Egalitatea $\dfrac{x}{x+1} = \dfrac{y}{y+2}$ implică $x(y+2) = y(x+1)$ şi se obţine $y = 2x$.	**2p**
Analog din $\dfrac{x}{x+1} = \dfrac{z}{z+3}$ se obţine $z = 3x$.	**1p**
Şi atunci $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{2x} + \dfrac{3}{3x} = 54$, de unde $x = \dfrac{1}{18}$.	**2p**
$y = \dfrac{1}{9}$ şi $z = \dfrac{1}{6}$.	**1p**
$x + y + z = \dfrac{1}{18} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3}$.	**1p**

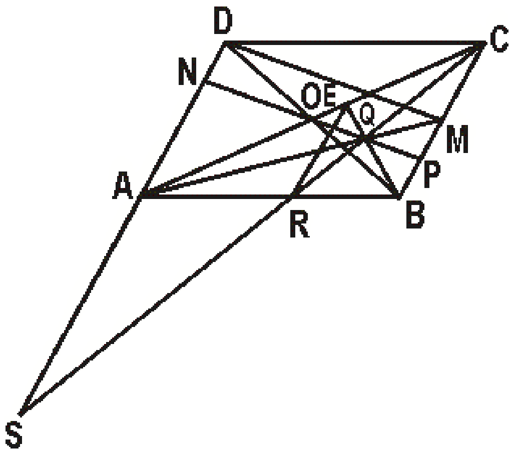
SUBIECTUL 3

În patrulaterul ABCD, $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle C) = 90^0$ **şi AB = AD. Dacă** $AM \perp BC$**, cu** $M \in (BC)$**, arătaţi că** $\mathcal{A}_{[ABCD]} = AM^2$**.**

	Fie $AN \perp DC$, $N \in DC$.	**1p**
	$\Delta ABM \equiv \Delta ADN$(IU) $\Rightarrow AN = AM$.	**2p**
	AMCN este pătrat.	**1p**
	$\mathcal{A}_{[ABCD]} = \mathcal{A}_{[AMCN]}$.	**2p**
	$\mathcal{A}_{[ABCD]} = AM^2$.	**1p**

<u>SUBIECTUL 4</u>

În paralelogramul ABCD, AC∩BD = {O}, M este mijlocul laturii [BC]. Prin O se construieşte NP || DM, N∈(AD), P∈(BC). Dacă AM∩NP = {Q} şi CQ∩AB = {R}, arătaţi că rapoartele $\frac{AR}{AB}$ şi $\frac{QR}{QC}$ au aceeaşi valoare şi determinaţi această valoare.

	Fie {E}=AC ∩ BQ. Aplicând teorema lui Ceva în ΔABC avem: $\frac{RA}{RB}\cdot\frac{MB}{MC}\cdot\frac{EC}{EA}=1 \Rightarrow \frac{RA}{RB}=\frac{EA}{EC} \Rightarrow$ RE || BC.	**2p**
	Şi atunci $\frac{AR}{AB}=\frac{RE}{BC}=\frac{QR}{QC}$.	**1p**
	Apoi pentru calcularea valorii, fie CQ ∩ AD={S}. În ΔBMD, OB=OD şi OP || DM $\Rightarrow$ PM=PB. Avem $\frac{PM}{BC}=\frac{1}{4}$.	**1p**
	PMDN fiind paralelogram, rezultă PM=DN şi $\frac{PM}{AN}=\frac{1}{3}$.	**1p**
	Avem: $\frac{1}{3}=\frac{PM}{AN}=\frac{QM}{AQ}=\frac{MC}{AS}$. şi de aici AS=3· MC.	**1p**
	Apoi $\frac{AR}{RB}=\frac{AS}{BC}=\frac{3}{2}$, în final $\frac{AR}{AB}=\frac{3}{5}=\frac{QR}{QC}$.	**1p**