Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Ministerul Educaţiei şi Cercetării Ştiinţifice

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 14 martie 2015

CLASA a VI-a

Problema 1. Pe o tablă sunt scrise la început numerele 11 şi 13. Un pas înseamnă scrierea pe tablă a unui număr nou, egal cu suma a două numere oarecare scrise deja pe tablă. Arătaţi că:

a) indiferent câţi paşi s-ar efectua, pe tablă nu se poate scrie numărul 86;

b) este posibil ca, după mai mulţi paşi, pe tablă să fie scris numărul 2015.

Gazeta Matematică

Problema 2. Fie triunghiul ABC obtuzunghic cu $AB = AC$. Notăm cu M simetricul punctului A faţă de punctul C şi cu P intersecţia dreptei AB cu mediatoarea segmentului $[AM]$. Ştiind că dreapta PM este perpendiculară pe BC, arătaţi că triunghiul APM este echilateral.

Problema 3. Determinaţi pătratele perfecte de cinci cifre, cu primele două cifre identice, care au răsturnatul pătrat perfect de cinci cifre.

(*Răsturnatul* unui număr natural este numărul obţinut prin scrierea cifrelor în ordine inversă, de exemplu: răsturnatul lui 12345 este 54321)

Problema 4. Determinaţi numerele naturale nenule A şi B, care au acelaşi număr de cifre, ştiind că

$$2 \cdot A \cdot B = \overline{AB},$$

unde $\overline{AB}$ este numărul obţinut prin scrierea cifrelor lui B după cifrele lui A.

Timp de lucru 2 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 14 martie 2015

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a VI-a

Problema 1. Pe o tablă sunt scrise la început numerele 11 şi 13. Un pas înseamnă scrierea pe tablă a unui număr nou, egal cu suma a două numere oarecare scrise deja pe tablă. Arătaţi că:

a) indiferent câţi paşi s-ar efectua, pe tablă nu se poate scrie numărul 86;

b) este posibil ca, după mai mulţi paşi, pe tablă să fie scris numărul 2015.

Gazeta Matematică

Soluţie

a) Orice număr care poate fi scris pe tablă este de forma $11a + 13b$, unde $a, b \in \mathbb{N}^*$ **1p**

Dacă ar exista $a, b \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $86 = 11a + 13b$, atunci $b \leq 6$ **1p**

Atunci $13b \in \{13, 26, 39, 52, 65, 78\}$, deci $11a = 86 - 13b \in \{73, 60, 47, 34, 21, 8\}$ **1p**

Niciunul dintre aceste numere nu se divide cu 11, deci 86 nu se poate scrie pe tablă **1p**

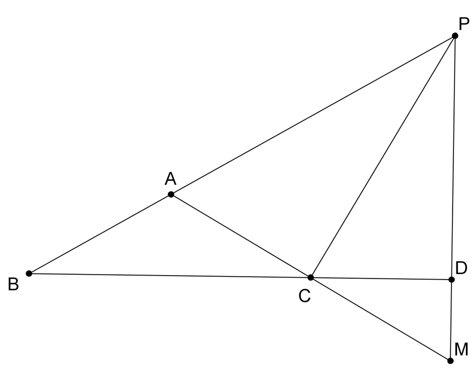
b) $2015 = 11 \cdot 182 + 13$... **1p**

Putem obţine numărul 2015 prin 182 de paşi astfel:

$13 + 11 = 24 \xrightarrow{+11} 13 + 2 \cdot 11 = 35 \xrightarrow{+11} 13 + 3 \cdot 11 = 46 \xrightarrow{+11} \ldots \xrightarrow{+11} 13 + 182 \cdot 11 = 2015$ .. **2p**

Problema 2. Fie triunghiul ABC obtuzunghic cu $AB = AC$. Notăm cu M simetricul punctului A faţă de punctul C şi cu P intersecţia dreptei AB cu mediatoarea segmentului $[AM]$. Ştiind că dreapta PM este perpendiculară pe BC, arătaţi că triunghiul APM este echilateral.

Soluţie



Fie $\{D\} = BC \cap PM$. Notăm $m(\sphericalangle ABC) = x$. Atunci $m(\sphericalangle MCD) = m(\sphericalangle ACB) = m(\sphericalangle ABC) = x$, de unde $m(\sphericalangle PMC) = 90° - x$ **2p**

Cum PC este mediatoarea segmentului $[AM]$, triunghiul PAM este isoscel, deci $\sphericalangle PMC \equiv \sphericalangle PAC$ **2p**

Dar $m(\sphericalangle PAC) = 180° - m(\sphericalangle BAC) = m(\sphericalangle ABC) + m(\sphericalangle ACB) = 2x$.

Rezultă $90^\circ - x = 2x$, de unde $x = 30^\circ$ **2p**

Atunci $m(\sphericalangle PMC) = m(\sphericalangle PAC) = 60^\circ$, deci triunghiul APM este echilateral.............. **1p**

Problema 3. Determinaţi pătratele perfecte de cinci cifre, cu primele două cifre identice, care au răsturnatul pătrat perfect de cinci cifre.

Soluţie

Fie $\overline{aabcd}$ un pătrat perfect cu $a \neq 0, d \neq 0$, astfel încât $\overline{dcbaa}$ este pătrat perfect.

Deoarece $\overline{dcbaa}$ este pătrat perfect, rezultă $a \in \{1, 4, 5, 6, 9\}$. **1p**

Numerele de forma $\overline{dcb55}$ sunt divizibile cu 5 şi nu sunt divizibile cu 25, deci nu pot fi pătrate perfecte **1p**

Numerele de forma $\overline{dcb66}$ sunt divizibile cu 2 şi nu sunt divizibile cu 4, deci nu pot fi pătrate perfecte.. **1p**

Numerele de forma $\overline{dcb11}$ sau $\overline{dcb99}$ nu pot fi pătrate perfecte deoarece dau restul 3 la împărţirea cu 4 .... **2p**

Studiem cazul $a = 4$. Întrucât $209^2 < 44000$ şi $213^2 > 45000$, rezultă că $\overline{aabcd} \in \{210^2, 211^2, 212^2\}$.

Cum $210^2 = 44100$ nu are răsturnatul de 5 cifre, $211^2 = 44521$ şi $12544 = 112^2$, $212^2 = 44944$, numerele căutate sunt 44521 şi 44944 .... **2p**

Problema 4. Determinaţi numerele naturale nenule A şi B, care au acelaşi număr de cifre, ştiind că

$$2 \cdot A \cdot B = \overline{AB},$$

unde $\overline{AB}$ este numărul obţinut prin scrierea cifrelor lui B după cifrele lui A.

Soluţie Fie n numărul de cifre ale lui A şi B. Din relaţia din enunţ avem $(2A-1)B = 10^n A$, de unde $2A - 1 \mid 10^n A$ **1p**

Cum $(2A-1, A) = 1$ şi $(2, 2A-1) = 1$, rezultă $2A - 1 \mid 5^n$, deci $2A - 1 \leq 5^n$ **2p**

Deoarece A are n cifre, rezultă $A \geq 10^{n-1}$, deci $2 \cdot 10^{n-1} - 1 \leq 2A - 1 \leq 5^n$. Obţinem

$$2 \cdot 2^{n-1} \cdot 5^{n-1} \leq 5 \cdot 5^{n-1} + 1 \leq 6 \cdot 5^{n-1},$$

deci $2^n \leq 6$, de unde $n \in \{1, 2\}$ **2p**

Pentru $n = 1$, din $2A - 1 \mid 5$, rezultă $2A - 1 \in \{1, 5\}$, deci $A \in \{1, 3\}$. Dacă $A = 1$, avem $B = 10$, care nu convine, deoarece B are o cifră. Dacă $A = 3$, avem $B = 6$ **1p**

Pentru $n = 2$, din $2A - 1 \mid 25$, rezultă $2A - 1 \in \{1, 5, 25\}$, deci $A \in \{1, 3, 13\}$; dar A are două cifre, deci $A = 13$ şi $25B = 1300$, deci $B = 52$. **1p**