

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 09.02.2013 –
CLASA A IX-A

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiectul 1.

 Prelucrare prof. *Ovidiu Șontea*, București

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $a_1 = S_1 = 3, a_2 = S_2 - S_1 = 5 - 3 = 2, a_3 = S_3 - S_2 = 9 - 5 = 4$	1 punct
$\frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{3} \neq \frac{4}{2} = \frac{a_3}{a_2}$	1 punct
Șirul nu este progresie geometrică.	1 punct
b) Să presupunem că lungimea primei sărituri este s și că după n sărituri se întoarce în punctul inițial. Drumul parcurs de lăcustă va fi o linie frântă închisă $A_1A_2\dots A_nA_1$ cu segmentele de lungimi $s, 2s, 4s, \dots, 2^{n-1}s$.	1 punct
Suma lungimilor primilor $n - 1$ segmente este $s + 2s + 4s + \dots + 2^{n-2}s = (2^{n-1} - 1)s$	1 punct
$2^{n-1}s = \overrightarrow{A_nA_1} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \dots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} \leq \overrightarrow{A_1A_2} + \dots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = (2^{n-1} - 1)s$. Fals.	1 punct
Nu poate.	1 punct

Subiectul 2.

 Prof. *Marcel Țena*, București

Detalii rezolvare	Barem asociat
Se observă că $1 \notin A$. Dacă $x \in A$ atunci $\frac{1}{x} \in A$ și $1 - x \in A$. De aici $\frac{1}{1-x} \in A, 1 - \frac{1}{x} \in A$ și $1 - \frac{1}{1-x} = \frac{x}{x-1} \in A$	3 puncte
Mulțimea căutată are cel mult cinci elemente, deci cel puțin două numere dintre cele 6 de mai sus sunt egale.	1 punct
Analizarea tuturor cazurilor posibile ce trebuie să fie îndeplinite pentru ca mulțimea să nu depășească cinci elemente.	2 puncte
Mulțimea este $\left\{2, \frac{1}{2}, -1\right\}$	1 punct

Subiectul 3.

 Prelucrare Gazeta Matematică nr. 4/2012, prof. *Vasile Berghea*, Avrig

Detalii rezolvare	Barem asociat
Din inegalitatea Cauchy $\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \dots + \frac{1}{1+x_n} \geq \frac{n^2}{n+x_1+x_2+\dots+x_n} = \frac{n}{2}$	3 puncte
Folosind relația din ipoteză obținem $\frac{4n-6}{n} \geq \frac{n}{2}$	1 punct
$n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$	1 punct
$n_{\max} = 6$, întrucât pentru $x_1 = x_2 = \dots = x_6 = 1$ se verifică relațiile din enunț	2 puncte

Subiectul 4.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Luând originea în O , vectorii de poziție verifică $\vec{r}_{H_1} = \vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C$ și analogele	2 puncte
$\frac{1}{2}(\vec{r}_{H_1} + \vec{r}_D) = \frac{1}{2}(\vec{r}_{H_2} + \vec{r}_A) = \frac{1}{2}(\vec{r}_{H_3} + \vec{r}_B) = \frac{1}{2}(\vec{r}_{H_4} + \vec{r}_C) = \vec{r}_P$	2 puncte
b) Mijlocul Q al lui $[MN]$ are vectorul de poziție $\frac{1}{2}(\vec{r}_M + \vec{r}_N) = \frac{1}{4}(\vec{r}_A + \vec{r}_C + \vec{r}_B + \vec{r}_D)$	1 punct
Din $\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{OQ}$ rezultă că O, P, Q sunt coliniare	2 puncte

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 09.02.2013 –
CLASA A IX-A

SUBIECTELE

Problema 1. a) Un șir de numere reale $(a_n)_{n \geq 1}$ are proprietatea

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 2^n + 1,$$

pentru orice $n \geq 1$. Stabiliți dacă șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este progresie geometrică.

b) Fie A_1, A_2 două puncte distincte într-un plan. O lăcustă sare pe acest plan din A_1 în A_2 , apoi continuă să sară, astfel încât lungimea fiecărei sărituri este de două ori mai mare decât cea precedentă. Poate să se întoarcă lăcusta vreodată în punctul A_1 ? (Justificare)

Problema 2. Să se determine mulțimile nevide $A \subset \mathbb{R}^*$ cu proprietățile:

a) mulțimea A are cel mult cinci elemente;

b) $x \in A \Rightarrow \frac{1}{x} \in A$ și $1 - x \in A$.

Problema 3. Să se determine cel mai mare număr natural n pentru care există numerele reale strict pozitive x_1, x_2, \dots, x_n astfel încât

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$$

și

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \dots + \frac{1}{1+x_n} = \frac{4n-6}{n}.$$

Problema 4. Fie $ABCD$ un patrulater înscris într-un cerc de centru O . Notăm cu H_1, H_2, H_3, H_4 ortocentrele triunghiurilor ABC, BCD, CDA , respectiv DAB și cu M, N mijloacele diagonalelor $[AC]$, respectiv $[BD]$.

a) Să se arate că segmentele $[DH_1], [AH_2], [BH_3], [CH_4]$ au același mijloc P .

b) Să se arate că punctele O, P și mijlocul segmentului $[MN]$ sunt coliniare.

*Toate subiectele sunt obligatorii și se notează cu puncte de la 0 la 7
Timp de lucru: 3 ore*