

Varianta 1

1. Arătați că numărul $23^{27} + 27^{23}$ este divizibil cu 10.
2. La un număr natural format din patru cifre se adună numărul format din ultimele trei cifre, numărul format din ultimele două cifre și ultima cifră a numărului inițial și se obține 3042. Care este numărul de patru cifre? Câte soluții are problema?
3. Două eleve de clasa a V-a au cumpărat portocale și banane. Una dintre ele a plătit 35 de lei pentru 5kg de portocale și 4kg de banane, iar cealaltă a plătit 31 de lei pentru 7kg de portocale și 2kg de banane. Ce sumă ar trebui plătită pentru 4kg de portocale și 5kg de banane ?
4. Să se găsească mulțimile A și B care au fiecare câte 3 elemente, numere naturale, știind că ele satisfac următoarele condiții :
 - a) $4 \in A \cap B$;
 - b) $x \in A \Rightarrow x^2 \in B$;
 - c) suma elementelor mulțimii B este triplul sumei elementelor mulțimii A .
5. Vrem să pavăm pardoseala unei bucătării de forma pătratică, cu plăci de faianță de formă pătrată, de aceeași mărime, fără să tăiem plăcile și fără spațiu între ele. La început am lipit plăcile de-a lungul pereților bucătăriei. Pentru asta am folosit 20 de plăci, exact jumătatea plăcilor cumpărate. Va fi suficientă cantitatea cumpărată pentru pavarea bucătăriei?

Varianta 2

1. Câte numere naturale de patru cifre există în sistemul zecimal cu proprietatea că dacă scădem din numărul respectiv suma cifrelor sale rezultatul va fi 2016?
2. Tatăl are 52 de ani, fiul său 24. Cu câți ani în urmă era tatăl de cinci ori mai în vârstă decât fiul său?
3. Numărul $10^{2016} - 2014$ este pătrat perfect? Justificați răspunsul.
4. La o grădiniță s-au cumpărat caiete și creioane, numărul creioanelor fiind de două ori mai mare decât cel al caietelor. La începutul primului semestru s-au distribuit copiilor câte 3 caiete și 7 creioane la fiecare, iar 50 de caiete și 52 de creioane au rămas pentru semestrul următor. Câți copii st în grădiniță?
5. Arătați că dublul sumei numerelor naturale care împărțite la 2016 dau câturi și resturi egale, se poate scrie ca produs de trei numere naturale consecutive.

Varianta 2

1. Câte numere naturale de patru cifre există cu proprietatea ca dacă scădem din numărul respectiv suma cifrelor sale rezultatul va fi 2016?

Rezolvare

Conform ipotezei $\overline{abcd} - a - b - c - d = 2016$

$$1000a + 100b + 10c + d - a - b - c - d = 999a + 99b + 9c = 2016 \Rightarrow 111a + 11b + c = 224$$

$$\Rightarrow a \in \{1, 2\}$$

$$\text{Dacă } a = 1 \Rightarrow 11b + c = 113, \text{ dar } 11b + c \leq 11 \cdot 9 + 9 = 108 < 113 \quad \dots \dots \dots 2 \text{ p}$$

$$\text{Dacă } a = 2 \Rightarrow 11b + c = 2 \Rightarrow b = 0 \text{ și } c = 2 \quad \dots \dots \dots 2 \text{ p}$$

Deoarece $d \in \{1, 2, \dots, 9\}$ sunt 10 numere care satisfac condițiile problemei

2. Tatăl are 52 de ani, fiul lui 24. Cu câți ani în urmă era tatăl de cinci ori mai în vârstă decât fiul lui?

Rezolvare

Cu x ani în urmă tatăl era de cinci ori mai vârstnic decât fiul lui

$$\text{Atunci } 52 - x = 5 \cdot (24 - x) \Rightarrow 52 - x = 120 - 5x$$

$$\text{Rezultă } 4x = 68 \text{ și obținem } x = 17$$

3. Numărul $10^{2016} - 2014$ este pătrat perfect? Justificați răspunsul.

Rezolvare

$$10^{2016} - 2014 = 999 \dots 997986 \text{ cu } 2012 \text{ cifre de } 9$$

Suma cifrelor numărului este $2012 \cdot 9 + 30$

Această sumă se divide cu 3 dar nu se divide cu pătratul său 9, deci numărul nu este pătrat perfect.

4. La o grădiniță s-au cumpărat caiete și creioane, numărul creioanelor fiind de două ori mai mare decât cel al caietelor. La începutul primului

semestru s-au distribuit copiilor câte 3 caiete și 7 creioane la fiecare, iar 50 de caiete și 52 de creioane au rămas pentru semestrul următor. Câți copii are grădinița?

Rezolvare

Fie n numărul copiilor din grădiniță

Numărul caietelor cumpărate este $3n + 50$

Numărul creioanelor cumpărate este $7n + 52$

Avem atunci ecuația $2(3n + 50) = 7n + 52$

Rezultă $n = 48$. Numărul copiilor din grădiniță este 48

5. Arătați că dublul sumei numerelor naturale care împărțite la 2016 dau câturi și resturi egale, se poate scrie ca produs de trei numere naturale consecutive.

Rezolvare

$$n : 2016 = x(\text{rest } x), x < 2016$$

Numerele căutate sunt:

$$0; 2016 \cdot 1 + 1; 2016 \cdot 2 + 2; 2016 \cdot 3 + 3; \dots; 2016 \cdot 2014 + 2014; 2016 \cdot 2015 + 2015$$

Suma lor este

$$S = 2016 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 2014 + 2015) + (1 + 2 + 3 + \dots + 2014 + 2015)$$

De unde, aplicând formula lui Gauss obținem

$$S = 2016 \cdot 2015 \cdot 2016 : 2 + 2015 \cdot 2016 : 2$$

$$\text{Atunci } 2S = 2016 \cdot 2015 \cdot 2016 + 2015 \cdot 2016 = 2015 \cdot 2016 ($$

$$2016 + 1) = 2015 \cdot 2016 \cdot 2017$$

3 p