Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală – 22 februarie 2014 - Maramureş
Varianta 2
CLASA a IX– a

7 p **1.** Fie $a,b,c\in[2,\infty)$. Demonstrați că :

$$\frac{ab+c}{c+1}+\frac{bc+a}{a+1}+\frac{ac+b}{b+1}\geq\frac{54}{a+b+c+3}.$$

G.M. 11/2013

2. Fie şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\bullet}$ definit astfel: $a_1=0,\ a_{n+1}=a_n+\sqrt{4a_n+1}+1,\ n\in\mathbb{N}^\bullet$.

4 p **a)** Să se determine a_n.

3 p **b)** Să se arate că $\sqrt{4a_1+1}+\sqrt{4a_2+1}+\cdots+\sqrt{4a_n+1}=n^2,\quad n\geq1.$

7 p **3.** Să se rezolve ecuația $\left[\frac{2x-1}{3}\right]+\left[\frac{2x+2}{3}\right]+\left[\frac{2x+5}{3}\right]=\frac{x+1}{3}$.

4. Fie ABC un triunghi oarecare cu centrul de greutate G şi B',C' picioarele bisectoarelor din B respectiv C. Cercul înscris în triunghi este tangent la AB în D şi la AC în E.

4 p **a)** Să se arate că dacă punctele B',G,C' sunt coliniare, atunci $\frac{1}{BC}=\frac{1}{AC}+\frac{1}{AB}$.

3 p **b)** Să se arate că dacă punctele D,G,E sunt coliniare, atunci $3BC=AB+AC$.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.
Timp de lucru **3 ore**. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.

Subiectele au fost propuse şi selectate de:
prof. *Erika Darolți*, Colegiul Național „Vasile Lucaciu” Baia Mare
prof. *Dana Heuberger*, Colegiul Național „Gheorghe Şincai” Baia Mare
prof. *Nicolae Muşuroia*, Colegiul Național „Gheorghe Şincai” Baia Mare

SUCCES!

Barem
clasa a IX-a

1. Din inegalitatea lui Bergström, obținem:

$$E=\frac{ab+c}{c+1}+\frac{bc+a}{a+1}+\frac{ac+b}{b+1}\ge\frac{\left(\sqrt{ab+c}+\sqrt{bc+a}+\sqrt{ac+b}\right)^2}{a+b+c+3}$$ ....(4p)

Se arată că $\left(\sqrt{ab+c}+\sqrt{bc+a}+\sqrt{ac+b}\right)^2\ge 54$ ....(3p).

2. a) Pentru $n=1\Rightarrow a_2=1\cdot 2$

$n=2\Rightarrow a_3=2\cdot 3$..$(1p)$

Demonstrăm prin inducție că $a_n=n(n-1),\quad \forall n\in\mathbb{N}^\bullet$ ....(3p)

b) $\sqrt{4a_k+1}=\sqrt{(2k-1)^2}=|2k-1|=2k-1$ ....(2p)

$\sqrt{4a_1+1}+\sqrt{4a_2+1}+\cdots+\sqrt{4a_n+1}=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$ ....(1p)

3. Fie $x\in\mathbb{R}$ o soluție a ecuației date $\Rightarrow\frac{x+1}{3}\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=3k-1,\, k\in\mathbb{Z}$.......(3p)

Atunci $\frac{2x-1}{3}=2k-1$, $\frac{2x+2}{3}=2k$, $\frac{2x+5}{3}=2k+1$.................................(2p)

Obținem $k=0$ şi $x=-1$. ....(2p)

4. a) Din teorema bisectoarei, rezultă $\overrightarrow{AC'}=\frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB},\quad \overrightarrow{AB'}=\frac{c}{a+c}\overrightarrow{AC}$ ...(1p)

G, B', C' sunt coliniare, atunci $\overrightarrow{AG}=x\overrightarrow{AC'}+(1-x)\overrightarrow{AB'}$ .... (1p)

Dar $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ .... (1p)

Din $x=\frac{a+b}{3b}$ şi $1-x=\frac{a+c}{3c}\Rightarrow\frac{1}{c}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a}$ .... (1p)

b) $\overrightarrow{AD}=\frac{p-a}{c}\overrightarrow{AB};\quad \overrightarrow{AE}=\frac{p-a}{b}\overrightarrow{AC}$ .... (1p)

D, G, E coliniare, atunci $\overrightarrow{AG}=x\cdot\overrightarrow{AD}+(1-x)\cdot\overrightarrow{AE}$ .... (1p)

Atunci $\frac{x(p-a)}{c}=\frac{1}{3}$ şi $\frac{(1-x)(p-a)}{b}=\frac{1}{3}$. Obținem $b+c=3a$ .....