



INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN CLUJ

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
CLASA a XI-a
16.02.2013**

Subiectul I.(30 puncte)

Fie $M \subset M_3(R_+^*)$ mulțimea matricelor care au pe diagonala principală toate elementele egale, iar produsul elementelor de pe fiecare linie și fiecare coloană egal cu 1.

a) Dați un exemplu de matrice din M care nu are toate elementele numere raționale;

b) Demonstrați că $\det(A) \geq 0, \forall A \in M$.

prof. Viorel Lupșor, L.T. „O. Ghibu” Cluj-Napoca

Subiectul II.(20 puncte)

Fie $A, B, C \in M_4(C)$ cu A inversabilă și $C \cdot (A - B) = A^{-1} \cdot B$. Să se arate că $(A - B) \cdot C = B \cdot A^{-1}$.

prof. Gheorghe Lobonț, Colegiul Național „Mihai Viteazul” Turda

Subiectul III.(20 puncte)

Se consideră șirurile $(a_n)_{n \geq 1} : a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}}$ și

$(b_n)_{n \geq 1} : b_n = n^\alpha (1 - a_n), \alpha \in R$.

a) Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$;

b) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

prof. univ. dr. Dorian Popa, U.T. Cluj-Napoca

prof. Viorel Lupșor, L.T. „O. Ghibu” Cluj-Napoca

Subiectul IV.(20 puncte)

Se consideră șirurile $(a_n)_{n \geq 1}$ și $(b_n)_{n \geq 1}$, unde: $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!}$ și $b_n = \sum_{k=1}^n k!(k+2)$

Se cere: a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$;

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n)^{b_n}$.

prof. Alb Nicolae, Lic. T. “O. Goga” Huedin

**Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timp efectiv de lucru - 3 ore.**

Barem clasa a XI-a
(OLM 2013-etapa locală)

Of. 10 p

Subiectul I. a) De exemplu, $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \in M.$ **(10 puncte)**

b) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & a & e \\ f & g & a \end{pmatrix} \in M.$ Deoarece produsul elementelor de pe fiecare linie și fiecare coloană este 1, deducem că $e = f = b$ și $c = d = g = \frac{1}{ab}.$ **(10 puncte)**

Prin urmare $A = \begin{pmatrix} a & b & \frac{1}{ab} \\ \frac{1}{ab} & a & b \\ b & \frac{1}{ab} & a \end{pmatrix}$ și $\det(A) = \left(a + b + \frac{1}{ab}\right) \left(a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2 b^2} - ab - \frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right).$ În condițiile problemei

$a + b + \frac{1}{ab} > 0.$ Pentru a demonstra că $a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2 b^2} - ab - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \geq 0,$ putem folosi inegalitatea $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz, \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$ **(10 puncte)**

Subiectul II.

$$\begin{aligned} C \cdot (A - B) = A^{-1} \cdot B &\Leftrightarrow C \cdot A - C \cdot B - A^{-1} \cdot B = O_4 | + I_4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow C \cdot A - C \cdot B - A^{-1} \cdot B + A^{-1} \cdot A = I_4 &\Leftrightarrow (C + A^{-1}) \cdot (A - B) = I_4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (A - B) \cdot (C + A^{-1}) = I_4 &\Leftrightarrow A \cdot C - B \cdot C - B \cdot A^{-1} + A \cdot A^{-1} = I_4 \Leftrightarrow (A - B) \cdot C = B \cdot A^{-1}. \end{aligned}$$
 (20 puncte)

Subiectul III.

a) Avem $\frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}, \forall k = \overline{1, n}.$ Însușind, rezultă $\frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} \leq a_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}.$ Aplicând teorema „cleștelui”, obținem egalitatea cerută. **(10 puncte)**

b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} - \dots - \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha \left(\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{n\sqrt{n^2+1}} + \frac{\sqrt{n^2+2}-n}{n\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{\sqrt{n^2+n}-n}{n\sqrt{n^2+n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\alpha-1} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}(\sqrt{n^2+1+n})} + \frac{2}{\sqrt{n^2+2}(\sqrt{n^2+2+n})} + \dots + \frac{n}{\sqrt{n^2+n}(\sqrt{n^2+n+n})} \right).$$

$$\text{Fie } (c_n)_{n \geq 1} : c_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}(\sqrt{n^2+1+n})} + \frac{2}{\sqrt{n^2+2}(\sqrt{n^2+2+n})} + \dots + \frac{n}{\sqrt{n^2+n}(\sqrt{n^2+n+n})}.$$

$$\text{Deoarece } \frac{k}{\sqrt{n^2+n}(\sqrt{n^2+n+n})} \leq \frac{k}{\sqrt{n^2+k}(\sqrt{n^2+k+n})} \leq \frac{k}{\sqrt{n^2+1}(\sqrt{n^2+1+n})}, \forall k = \overline{1, n},$$

$$\text{însurmand, rezultă } \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\sqrt{n^2+n}(\sqrt{n^2+n+n})} \leq c_n \leq \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\sqrt{n^2+1}(\sqrt{n^2+1+n})}. \text{ Aplicând teorema „cleștelui”,}$$

$$\text{obținem } \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{1}{4}. \text{ Prin urmare, } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \begin{cases} \infty, & \text{dacă } \alpha > 1 \\ \frac{1}{4}, & \text{dacă } \alpha = 1. \\ 0, & \text{dacă } \alpha < 1 \end{cases} \quad (10 \text{ puncte})$$

Subiectul IV

$$\text{a) } a_n = \sum_{k=1}^n \frac{k+2}{k! [1+k+1+(k+1)(k+2)]} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!(k+2)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!(k+2)} = \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+2)!} \right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+2)!} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}.$$

(10 puncte)

b) Evident $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$ și astfel cu limita cerută ne situăm în cazul 1^∞ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n)^{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{2}{(n+2)!} \right]^{b_n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{2}{(n+2)!} \cdot b_n \right]}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{(n+2)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k!(k+2)}{(n+2)!} \stackrel{\text{Stolz-C}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!(n+3)}{(n+3)! - (n+2)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!(n+3)}{(n+2)!(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)}{(n+2)^2} = 0.$$

$$\text{Astfel: } \lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n)^{b_n} = e^0 = 1$$

(10 puncte)