Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Ministerul Educaţiei Naţionale

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 8 Martie 2014

CLASA a VII-a

Problema 1. a) Arătaţi că pentru orice numere reale a şi b are loc relaţia:

$$\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)+50 \geq 2\,(2a+1)\,(3b+1)\,.$$

b) Determinaţi numerele naturale n şi p care verifică relaţia

$$\left(n^2+1\right)\left(p^2+1\right)+45 = 2\,(2n+1)\,(3p+1)\,.$$

Problema 2. Fie numerele reale a, b, c astfel încât:

$$|a-b| \geq |c|, \quad |b-c| \geq |a|, \quad |c-a| \geq |b|.$$

Arătaţi că unul dintre numerele a, b, c este suma celorlalte două.

Problema 3. Se consideră triunghiul ABC în care $m(\hat{A}) = 135^\circ$. Perpendiculara în A pe dreapta AB intersectează latura $[BC]$ în punctul D, iar bisectoarea unghiului B intersectează latura $[AC]$ în punctul E. Determinaţi măsura unghiului BED.

Gazeta Matematică

Problema 4. Se consideră pătratul $ABCD$ şi punctele $K \in (AB)$, $L \in (BC)$ şi $M \in (CD)$ astfel încât triunghiul KLM este dreptunghic isoscel, cu unghiul drept în L. Demonstraţi că dreptele AL şi DK sunt perpendiculare.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 8 Martie 2014

CLASA a VII-a

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Problema 1. a) Arătaţi că pentru orice numere reale a şi b are loc relaţia:

$$\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)+50 \geq 2\,(2a+1)\,(3b+1)\,.$$

b) Determinaţi numerele naturale n şi p care verifică relaţia:

$$\left(n^2+1\right)\left(p^2+1\right)+45 = 2\,(2n+1)\,(3p+1)\,.$$

Soluţie. a) Relaţia din enunţ este echivalentă cu
$(ab-6)^2+(a-2)^2+(b-3)^2 \geq 0$ **3p**
b) $(np-6)^2+(n-2)^2+(p-3)^2=5$ **1p**
$(np-6)^2, (n-2)^2, (p-3)^2 \in \{0,1,4\}$ distincte **1p**
Discutarea cazurilor şi găsirea soluţiilor:$(n,p) \in \{(2,4),(2,2)\}$ **2p**

Problema 2. Fie numerele reale a, b, c astfel încât:

$$|a-b| \geq |c|, \quad |b-c| \geq |a|, \quad |c-a| \geq |b|.$$

Arătaţi că unul dintre numerele a, b, c este suma celorlalte două.

Soluţie. Ridicând la pătrat inegalităţile din enunţ rezultă $(a-b)^2 \geq c^2$ şi analoagele **2p**

De aici rezult ă $(a-b+c)(b+c-a) \leq 0$ şi analoagele **2p**

Atunci: $(a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2 \leq 0$, de unde rezultă că unul dintre numerele a, b, c este suma celorlalte două **3p**

Soluţie alternativă. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune $a \geq b \geq c$. Atunci $a-b \geq |c|$ şi $b-c \geq |a| \quad (*)$ **1p**

Adunând relaţiile, rezultă $a-c \geq |a|+|c| \geq a-c$, deoarece $|a| \geq a$ şi $|c| \geq -c$ **2p**

Ca urmare, în dubla inegalitate de mai sus are loc egalitatea, ceea ce se întâmplă dacă $a=|a|$ şi $|c|=-c$, adică $a \geq 0$ şi $c \leq 0$ **2p**

Relaţiile $(*)$ devin $a-b \geq -c$ şi $b-c \geq a$, de unde $b=a+c$ **2p**

Problema 3. Se consideră triunghiul ABC în care $m(\hat{A})=135°$. Perpendiculara în A pe dreapta AB intersectează latura $[BC]$ în punctul D, iar bisectoarea unghiului B intersectează latura $[AC]$ în punctul E. Determinaţi $m(\widehat{BED})$.

Gazeta Matematică

Soluţie. Dacă $I \in (BE)$ astfel încât IA este bisectoarea unghiului $\widehat{DAB}$, de unde ID bisectoarea unghiului $\widehat{ADB}$ **1p**

Din $m(\widehat{ADB}) + m(\widehat{ABD}) = 90°$ şi $m(\widehat{IDB}) + m(\widehat{IBD}) = 45°$ deducem că $m(\widehat{DIB}) = 135°$ **1p**

$\triangle ABE \sim \triangle IBD$ **1p**

Implicaţia $\dfrac{AB}{IB} = \dfrac{BE}{BD} \Rightarrow \dfrac{AB}{EB} = \dfrac{BI}{BD}$ **1p**

$\triangle ABI \sim \triangle DBE$ **1p**

$m(\widehat{BED}) = m(\widehat{BAI})$ **1p**

$m(\widehat{BED}) = 45°$ **1p**

Problema 4. Se consideră pătratul $ABCD$ şi punctele $K \in (AB)$, $L \in (BC)$ şi $M \in (CD)$ astfel încât triunghiul KLM este dreptunghic isoscel, cu unghiul drept în L. Demonstraţi că dreptele AL şi DK sunt perpendiculare.

Soluţie. $\triangle KLB \equiv \triangle LMC$ **2p**

$KB = LC$ **1p**

Din $AB = BC$ deducem $AK = BL$ **1p**

$\triangle AKD \equiv \triangle BLA$ **2p**

Din $AK \perp BL$ şi $AD \perp BA$, rezultă $AL \perp KD$ **1p**

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.