Olimpiada Națională de Fizică
Timişoara 2016
Proba teoretică

XII

Problema 1- Optică ondulatorie

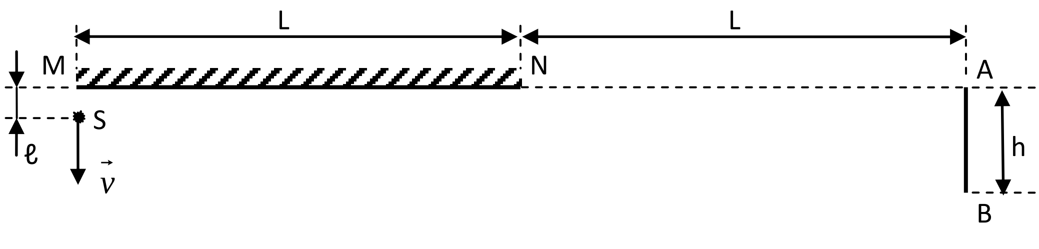
A. Interferență şi lentile

Lentilele de bună calitate aleunor instrumente optice (luneta astronomică, binoclu, aparat fotografic) sunt acoperite cu un strat optic subţire, respectiv o peliculă transparentă care face ca aceste lentile să aibă pe faţa de intrare o nuanţă de albastru-violet. Grosimea şi indicele de refracţie ale stratului depus se aleg astfel încât să se micşoreze cât mai mult intensitatea radiaţiei reflectate de suprafaţa lentilei, iar coeficientul de transmisie să fie cât mai mare, mărindu-se luminozitatea imaginii care se formează în aparat. Pe faţa de intrare a unei lentile din sticlă cu indicele de refracţie $n_s = 1{,}5$ este depus un strat optic, asimilat unei lame subţiri cu feţe plan paralele, cu indicele de refracţie $n = 1{,}35$. Determinaţi grosimea minimă h_{min}, a acestui strat optic pentru a obţine o valoare cât mai mică a intensităţii radiaţiei reflectate, simultanpentru radiaţiile cu lungimile de undă $\lambda_1 = 700\ \text{nm}$ şi $\lambda_2 = 420\ \text{nm}$ din domeniul vizibil.

B. Interferență şi oglinzi

Sursa punctiformă de lumină monocromatică S (vezi figura) se află iniţial la distanţa $\ell = 1\ \text{mm}$ faţă de capătul M al oglinzii plane. Ecranul de observare AB are lungimea $h = 1\ \text{cm}$ iar distanţa NA este egală cu lungimea MN a oglinzii. Planul oglinzii este perpedicular pe planul ecranului. La momentul $t = 0$, sursa S începe să fie deplasată cu viteza constantă $v = 0{,}1\ \text{mm/s}$, îndepărtându-se de oglindă, pe o direcţie perpendiculară pe planul oglinzii.

Precizează şi argumentează în ce sens se deplasează maximele de interferenţă de pe ecranul AB. Determină momentele de timp la care numărul maximelor luminoase de pe ecranul AB este dublu faţă de numărul iniţial de maxime.



C. … şi difracţie

O radiaţie luminoasă cu lungimea de undă $\lambda = 535\ \text{nm}$ este incidentă normal pe o reţea de difracţie funcţionând prin transmisie. Determinaţi constanta d a reţelei ştiind că unul dintre maximele de difracţie se formează în direcţia $\theta = 35^0$ şi că cel mai depărtat maxim de difracţie este cel de ordin $k_{max} = 5$.

---

1. Fiecare dintre subiectele 1, 2, respectiv 3 se rezolvă pe o foaie separată care se secretizează.
2. În cadrul unui subiect, elevul are dreptul să rezolve în orice ordine cerinţele.
3. Durata probei este de 3 ore din momentul în care s-a terminat distribuirea subiectelor către elevi.
4. Elevii au dreptul să utilizeze calculatoare de buzunar, dar neprogramabile.
5. Fiecare subiect se punctează de la 10 la 1 (1 punct din oficiu). Punctajul final reprezintă suma acestora.

Problema 2 – Experimetul lui Davisson şi Germer

În fig. 1 [preluată din C.J.Davisson and L.H.Germer, *Reflection and Refraction of Electrons by a Crystal of Nickel*, Proc. Nat. Acad. Science, **14**, 619 (1928)] este dată curba obţinută din datele experimentale ale experimentului lui Davisson şi Germer, în care s-a studiat împrăştierea electronilor sub un unghi de incidenţă de 10°, pe un monocristal de nichel. Pe axa absciselor sunt trecute valorile lui $\sqrt{U}$, unde U este tensiunea de accelerare a electronilor exprimată în volţi, iar pe axa ordonatelor, intensitatea relativă a fasciculului de electroni împrăştiat. Pentru ordine de difracţie mari, maximele sunt echidistante (intervalul dintre ele este $3,06\ \mathrm{V}^{\frac{1}{2}}$), dar pentru ordine de difracţie mici, această regularitate (indicată pe grafic prin săgeţi) este încălcată.

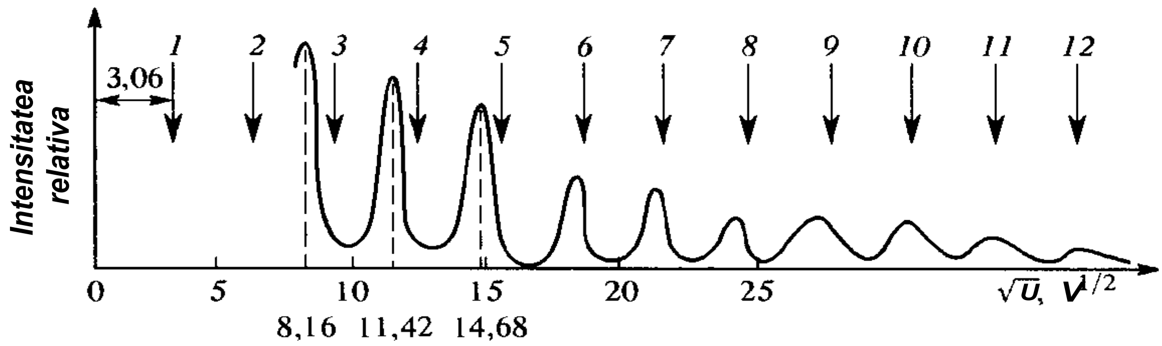


fig.1

a) Determinaţi distanţa dintre planele reticulare ale cristalului de nichel, pe care are loc difracţia.

b) Pentru a explica neconcordanţele constatate s-a ţinut cont de refracţia undelor asociate în cristalul de nichel. Deduceţi expresia acestui indice de refracţie şi calculaţi indicele de refracţie al nichelului pentru undele asociate electronilor, corepunzătoare maximelor de ordinul 3, 4 şi 5, care se observă pentru valorile corespunzătoare ale lui $\sqrt{U} = 8{,}16\ \mathrm{V}^{\frac{1}{2}}$, $11{,}42\ \mathrm{V}^{\frac{1}{2}}$ şi $14{,}68\ \mathrm{V}^{\frac{1}{2}}$.

c) Considerăm acum că pe suprafaţa unui metal cade sub incidenţă normală un fascicul de electroni cu energia $1\,\mathrm{eV}$, astfel încât o pătrime din numărul de electroni incidenţi se reflectă. Determinaţi energia medie a electronilor reflectaţi de suprafaţa aceluiaşi metal, dacă pe metal este incident normal un fascicul format din electroni cu energiile $1\,\mathrm{eV}$ şi $\frac{1}{3}\,\mathrm{eV}$, având, respectiv, raportul dintre numărul de electroni incidenţi în unitatea de timp egal cu $\frac{4}{9}$.

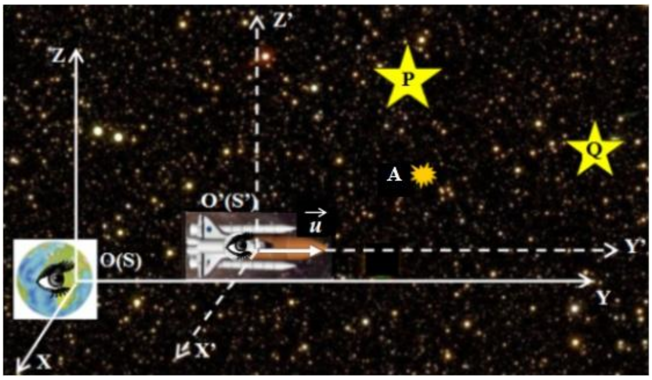
<u>*Obs*</u>. Se cunoaşte formula lui Fresnel a factorului de reflexie (energetic), la incidenţă normală, $R = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2$, n fiind indicele de refracţie relativ al metalului faţă de aer.

Se cunosc: constanta lui Planck $h = 6{,}625\cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}$, masa electronului $m = 9{,}1\cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$, sarcina electrică elementară $e = 1{,}6\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$ şi $n_{aer} = 1$.

Problema 3 – Teoria Relativității Restrânse

A. Explozii stelare

Un observator, O, aflat în originea unui sistem de referință inerțial fix, SXYZ, atașat Pământului (așa cum indică desenul din figura 1), înregistrează exploziile stelelor P și Q, utilizând ceasornicul din sistemul său de referință, la momentele t_P și respectiv $t_Q > t_P$. Aceleași două evenimente sunt înregistrate și de un observator O', aflat în originea sistemului inerțial mobil S'X'Y'Z', atașat unei navete spațiale, care se deplasează rectiliniu și uniform față de Pământ, cu viteza $\vec{u}$.



a) *Să se determine* condițiile pentru care, în raport cu observatorul O' din sistemul S', cele două explozii: 1) se succed în aceeași ordine; 2) sunt simultane 3) se succed în ordine inversă.

Coordonatele de poziție alecelor două stele fixe, P și Q, în raport cu sistemul SXYZ sunt: P(x_P, y_P, z_P) și Q(x_Q, y_Q, z_Q). Se cunoaște viteza luminii în vid, c.

b) Un asteroid, A, se deplasează astfel încât în raport cu sistemul de referință S ecuațiile parametrice ale traiectoriei sale sunt:

$$x = \mathrm{v}_0 t;\ \ y = \frac{at^2}{2};\ \ z = 0.$$

Să se stabilească: 1) ecuația traiectoriei asteroidului A în raport cu sistemul SXYZ; 2) ecuațiile parametrice ale mișcării asteroidului A în raport cu sistemul S′; 3) ecuația traiectoriei asteroidului A în raport cu sistemul S′.

B. Accelerația relativistă

Asupra unui punct material cu masa de repaus m_0, aflat în repaus în sistemul de referință al laboratorului, acționează o forță constantă $\vec{F}$.

c) *Să se demonstreze* că accelerația punctului material, în raport cu SRL, corespunzător momentului când viteza punctului material în raport cu SRL este $\vec{\mathrm{v}}$, este dată de expresia:

$$\vec{a} = \frac{1}{m}\vec{F} - \frac{\vec{F}\cdot\vec{\mathrm{v}}}{mc^2}\vec{\mathrm{v}};\ m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}},$$

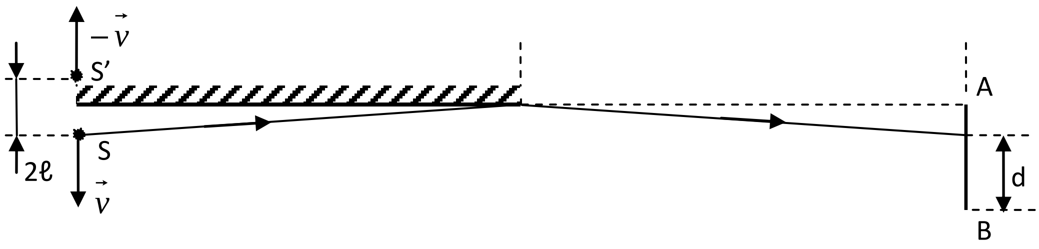
unde c este viteza luminii în vid. Cazuri particulare: 1) $\vec{F} \perp \vec{\mathrm{v}}$; 2) $\vec{F} \mathbin{//} \vec{\mathrm{v}}$.

Subiecte propuse de:
Prof. Liviu ARICI – Colegiul Național „Nicolae Bălcescu", Brăila
Prof. Florin BUTUŞINĂ – Colegiul Naţional „Simion Bărnuţiu", Şimleu Silvaniei
Prof. Petrică PLITAN – Colegiul Național „Gheorghe Șincai", Baia Mare
Prof. dr. Mihail SANDU – Liceul Tehnologic de Turism, Călimănești

Olimpiada Naţională de Fizică
Timişoara 2016
Proba teoretică
Barem

XII

Problema 1 – Optică ondulatorie		**10p**
A. Interferenţă şi lentile Pentru a obţine o intensitate cât mai mică a radiaţiei reflectate razele obţinute prin reflexia luminii pe faţa inferioară, respectiv pe faţa superioară a lamei trebuie să interfere distructiv, adică să formeze prin interferenţa lor un minim al intensităţii luminoase. Fiecare din aceste raze suferă o reflexie pe mediu mai refringent, cu o pierdere de $\frac{\lambda}{2}$, prin urmare diferenţa de drum optic dintre aceste raze este: $$\Delta = 2nh\cos r .$$ Putem considera că incidenţa este aproape normală, adică $i \cong 0 \Rightarrow r \cong 0$ şi $\cos r \cong 1$, deci diferenţa de drum optic va fi: $$\Delta \cong 2nh .$$	1p	**3p**
Pentru a obţine un minim de inteferenţă diferenţa de drum optic trebuie să fie multiplu impar de $\frac{\lambda}{2}$: $$2nh = (2k+1)\frac{\lambda}{2}, \quad k \text{ fiind un număr întreg.}$$ Obţinem grosimea stratului optic: $$h = (2k+1)\frac{\lambda}{4n}$$	0,5p	
Particularizăm această relaţie simultan pentru cele două lungimi de undă: $$\begin{cases} h = (2k_1+1)\frac{\lambda_1}{4n} \\ h = (2k_2+1)\frac{\lambda_2}{4n} \end{cases} \quad (*)$$	0,5p	
Prin urmare $(2k_1+1)\lambda_1 = (2k_2+1)\lambda_2$ şi înlocuind aici valorile numerice din enunţ pentru cele două lungimi de undă obţinem: $$5k_1 = 3k_2 - 1$$ Folosind valori întregi pentru k_1 şi k_2 obţinem mai multe soluţii posibile: $$\begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = 2 \end{cases}; \begin{cases} k_1 = 4 \\ k_2 = 7 \end{cases}; \begin{cases} k_1 = 7 \\ k_2 = 12 \end{cases} \ldots \text{ ş.a.m.d}$$	0,5p	
Deoarece căutăm un h cât mai mic vom alege perechea $k_1 = 1$ şi $k_2 = 2$.	0,5p	

<table>
<tr><td>Înlocuind aceste valori în una din expresiile $(*)$ ale lui h, obţinem grosimea minimă:
$$h_{min} \cong 389\mathrm{nm}$$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>B. Interferenţă şi oglinzi


Dispozitivul este echivalent cu un dispozitiv Young (sursele coerente fiind S şi imaginea ei în oglindă, S'), având distanţa dintre surse 2ℓ şi distanţa surse-ecran 2L.</td><td>0,5p</td><td rowspan="6">3p</td></tr>
<tr><td>Figura de interferenţă se obţine doar pe o porţiune a ecranului AB.
d – lărgimea zonei de interferenţă, unde se suprapun fasciculul direct şi cel reflectat</td><td>0,5p</td></tr>
<tr><td>La deplasarea sursei S, distanţa dintre S şi S' creşte, astfel încât diferenţa de drum dintre cele două raze ce ajung la un punct al ecranului va creşte. Ca urmare, maximele de interferenţă se vor deplasa dinspre B spre A, odată cu scăderea interfranjei.</td><td>0,5p</td></tr>
<tr><td>Înainte de începerea deplasării sursei S, numărul de maxime de pe ecran este:
$N = \frac{d}{i}$, i – interfranja
$$i = \frac{\lambda \cdot 2L}{2\ell} = \frac{\lambda \cdot L}{\ell}$$
$$d = h - \ell$$
$$N = \frac{(h-\ell)\ell}{\lambda L}$$</td><td>0,5p</td></tr>
<tr><td>În momentul dublării numărului de maxime luminoase avem:
$$\ell' = \ell + vt$$
$$d' = h - \ell' = h - \ell - vt$$
$$i' = \frac{\lambda \cdot 2L}{2\ell'} = \frac{\lambda \cdot L}{\ell + vt}$$
$$N' = \frac{d'}{i'} = \frac{(h-\ell-vt)(\ell+vt)}{\lambda L}$$</td><td>0,5p</td></tr>
<tr><td>Punând condiţia $N' = 2N$, rezultă:
$(h-\ell-vt)(\ell+vt) = 2\ell(h-\ell)$, de unde rezultă ecuaţia:
$v^2t^2 - v(h-2\ell)t + \ell(h-\ell) = 0$
Folosind valorile numerice din enunţ, rezultă soluţiile:
$t_1 = 13{,}5\mathrm{s}$ respectiv $t_2 = 66{,}4\mathrm{s}$
Observaţie: Momentele determinate constituie valori din intervalele de timp în care avem pe ecran acel număr dublu de maxime faţă de cel iniţial. Al doilea moment corespunde unei zone</td><td>0,5p</td></tr>
</table>

de interferenţă reduse.		
C. … şi difracţie Condiţia de obţinere a maximelor principale de difracţie este $d\sin\theta = m\lambda$, prin urmare: $$d = \frac{m\lambda}{\sin\theta}\ (***)$$	0,5p	**3p**
Putem scrie $\sin\theta = m\frac{\lambda}{d}$, şi pentru că $\sin\theta \le 1$ vom obţine $m \le \frac{d}{\lambda}$, adică $m_{max} = \frac{d}{\lambda}$. Deoarece raportul $\frac{d}{\lambda}$ nu este neapărat un număr întreg putem scrie: $$m_{max} = k_{max} + \Delta k$$ relaţie în care k_{max} este un număr întreg, iar Δk este un număr subunitar.	1p	
Vom scrie condiţia de obţinere a maximelor de difracţie pentru două situaţii: $$\begin{cases} d\sin\theta = m\lambda \\ d\sin 90^0 = (k_{max} + \Delta k)\lambda \end{cases}$$ După împărţirea acestor relaţii obţinem: $$m = (k_{max} + \Delta k)\sin\theta$$ Pentru $k_{max} = 5$ şi $\theta = 35^0$ obţinem: $$m = 5\sin\theta + \Delta k\sin\theta$$ $$m = 2{,}8675 + \Delta k \cdot 0{,}5735$$	0,5p	
Deoarece m trebuie să fie un număr întreg, iar $(\Delta k \cdot 0{,}5735) < 1$ găsim soluţia $m = 3$.	0,5p	
Din condiţia de maxim de difracţie pentru $\theta = 35^0$ şi $m = 3$ obţinem constanta reţelei: $$d = \frac{m\lambda}{\sin\theta}$$ $$d \cong 2{,}8 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m} = 2{,}8\,\mu\mathrm{m}$$	0,5p	
Oficiu	1p	**1p**
Problema 2 – Experimentul lui Davisson şi Germer		**10p**
a) Conform formulei lui Bragg, condiția de maxim de difracție este $$2d\sin\theta = k\lambda$$ unde d este distanța dintre planele reticulare pe care are loc difracția, iar θ unghiul dintre fasciculul de electroni și aceste plane.	1p	**3p**

Energia electronilor incidenți este

$$eU = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\lambda^2}$$

unde $p = \frac{h}{\lambda}$ este impulsul electronului, conform formulei lui de Broglie.

Rezultă

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2meU}}$$

și

$$d = k\frac{h}{\sqrt{8meU}\sin\theta}$$

1p

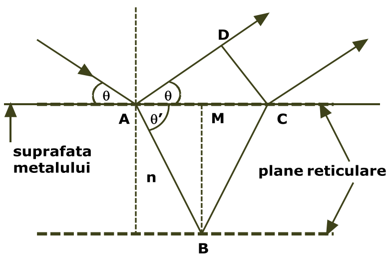
Considerând primul maxim de difracție ($k = 1$), care se obține pentru $\sqrt{U} = 3{,}06\ \mathrm{V}^{\frac{1}{2}}$

și având în vedere că $\theta = 80°$, rezultă

$$d = \frac{6{,}625\cdot 10^{-34}}{\sqrt{8\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}}\cdot 3{,}06\cdot \sin 80°} = 2{,}037\cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$$

1p

b) Diferența de drum optic, conform figurii, este



$$(\delta) = (ABC) - (AD) = 2(AB) - (AD)$$

Din geometria figurii, se obține pe rând:

$$\sin\theta' = \frac{d}{AB} \Rightarrow AB = d\sin\theta'$$

$$\cos\theta = \frac{AD}{AC} = \frac{AD}{2AM}$$

$$\mathrm{tg}\,\theta' = \frac{d}{AM} \Rightarrow AM = d\,\mathrm{ctg}\,\theta'$$

$$\cos\theta = \frac{AD}{2d\,\mathrm{ctg}\,\theta'} \Rightarrow AD = 2d\,\mathrm{ctg}\,\theta'\cos\theta$$

Deci, condiția de maxim de difracție devine:

$$(\delta) = 2\frac{nd}{\sin\theta'} - 2d\,\mathrm{ctg}\,\theta'\cos\theta = k\lambda$$

0,5p

3p

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

Conform notațiilor din figură, legea refracției este $$\frac{\cos\theta}{\cos\theta'}=n$$ deci $$\operatorname{ctg}\theta'=\frac{\cos\theta'}{\sin\theta'}=\frac{\dfrac{\cos\theta}{n}}{\dfrac{\sqrt{n^2-\cos^2\theta}}{n}}=\frac{\cos\theta}{\sqrt{n^2-\cos^2\theta}}$$ Înlocuind în condiția de maxim, rezultă $$2nd\frac{n}{\sqrt{n^2-\cos^2\theta}}-\frac{2d\cos^2\theta}{\sqrt{n^2-\cos^2\theta}}=k\lambda$$ De aici rezultă condiția de maxim (formula lui Bragg) dacă se ține seama de refracția undelor de Broglie în interiorul cristalului: $$2d\sqrt{n^2-\cos^2\theta}=k\lambda$$	0,5p	
Din $$2d\sin\theta=k\lambda=k\frac{h^2}{\sqrt{2meU}}$$ $$2d\sqrt{n^2-\cos^2\theta}=k\lambda'=k\frac{h^2}{\sqrt{2meU'}}$$ unde U' este diferența de potențial de accelerare a electronilor când indicele de refracție al metalului este $n\neq1$, prin împărțirea relațiilor de mai sus, se obține: $$\frac{\sin\theta}{\sqrt{n^2-\cos^2\theta}}=\sqrt{\frac{U'}{U}}$$ De aici se obține expresia indicelui de refracție: $$n=\sqrt{\frac{U}{U'}\sin^2\theta+\cos^2\theta}$$	1p	

Pentru ordiul de difracție $k=3$, avem $\sqrt{U}=3,06\cdot 3=9,18\ \mathrm{V}^{\frac{1}{2}}$ și $\sqrt{U'}=8,16\ \mathrm{V}^{\frac{1}{2}}$ și

$$n=\sqrt{\left(\frac{9,18}{8,16}\right)^2\cdot\sin^2 80°+\cos^2 80°}=1,1214$$

Analog se obține pentru $k=4$

$$n=\sqrt{\left(\frac{12,24}{11,42}\right)^2\cdot\sin^2 80°+\cos^2 80°}=1,0697$$

și pentru $k=5$

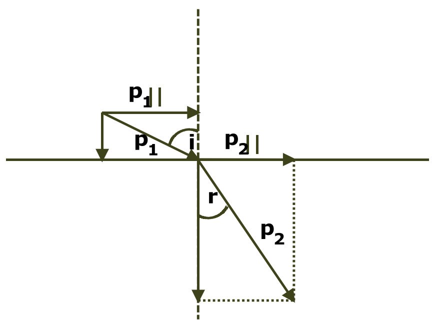
$$n=\sqrt{\left(\frac{15,3}{14,68}\right)^2\cdot\sin^2 80°+\cos^2 80°}=1,041$$

1p

c) La refracția undelor asociate fasciculului de electroni se conservă energia și componenta paralelă cu suprafața metalului a impulsului:

$$E_{cin,ext}+E_{pot,ext}=E_{cin,\mathrm{int}}+E_{p,\mathrm{int}}$$

$$p_1\sin i=p_2\sin r$$



În exteriorul metalului, energia potențială este nulă, iar în interior există o energie potențială de interacțiune cu metalul. Indicele de refracție al metalului se poate scrie atunci:

$$n=\frac{\sin i}{\sin r}=\frac{p_2}{p_1}$$

Dar

$$p_1=\sqrt{2mE_{cin,ext}}=\sqrt{2meU}$$

$$p_2=\sqrt{2mE_{cin,\mathrm{int}}}=\sqrt{2me\left(U-U_0\right)}$$

Prin urmare

$$n=\sqrt{\frac{U-U_0}{U}}=\sqrt{1-\frac{U_0}{U}}$$

sau

$$n=\sqrt{1-\frac{E_{pot,\mathrm{int}}}{E_{cin,ext}}}$$

1p

3p

în care U_0 este potențialul electric interior al metalului și care este negativ.		
Știind coeficientul de reflexie, cu ajutorul formulei lui Fresnel, vom determina energia potențială din interiorul metalului. Vom nota $E_{pot,\text{int}} = W$ și $E_{cin,ext} = E$, pentru ușurința scrierii. Deci $$R = \left(\frac{\sqrt{1-\frac{W}{E}}-1}{\sqrt{1-\frac{W}{E}}+1}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{E-W}-\sqrt{E}}{\sqrt{E-W}+\sqrt{E}}\right)^2$$ După câteva calcule matematice simple se obține: $$W = -\frac{4E\sqrt{R}}{\left(1-\sqrt{R}\right)^2}$$ Numeric $W = -8\ \text{eV}$. Calculăm acum coeficientul de reflexie pentru fasciculul de electroni cu energia $\frac{1}{3}\ \text{eV}$: $$R_2 = \left(\frac{\sqrt{E_2-W}-\sqrt{E_2}}{\sqrt{E_2-W}+\sqrt{E_2}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\frac{1}{3}+8}-\sqrt{\frac{1}{3}}}{\sqrt{\frac{1}{3}+8}+\sqrt{\frac{1}{3}}}\right)^2 = \frac{4}{9}$$	1p	
Numărul de electroni **reflectați** în unitatea de timp, j_r este $j_r = Rj$, unde j este numărul de electroni **incidenți** în unitatea de timp. Numărul total de electroni reflectați în unitatea de timp va fi: $$j_{r,tot} = R_1 j_1 + R_2 j_2$$ Din $$j = j_1 + j_2$$ și $$\frac{j_1}{j_2} = \frac{4}{9}$$ rezultă	1p	

$$j_1 = \frac{4j}{13} \quad \text{și} \quad j_2 = \frac{9j}{13}$$ Energia medie a electronilor reflectați de pe suprafața metalului (în unitatea de timp) va fi: $$\bar{E} = \frac{\text{energia electronilor reflectati de felul 1} + \text{energia electronilor reflectati de felul 2}}{\text{numărul total de electroni reflectati}}$$ sau $$\bar{E} = \frac{E_1 j_1 R_1 + E_2 j_2 R_2}{j_1 R_1 + j_2 R_2} = \frac{E_1 \frac{4j}{13} R_1 + E_2 \frac{9j}{13} R_2}{\frac{4j}{13} R_1 + \frac{9j}{13} R_2} = \frac{4E_1 R_1 + 9E_2 R_2}{4R_1 + 9R_2}$$ Numeric: $\bar{E} = \dfrac{4\cdot 1\cdot \frac{1}{4} + 9\cdot \frac{1}{3}\cdot \frac{4}{9}}{4\cdot \frac{1}{4} + 9\cdot \frac{4}{9}} = \dfrac{7}{14}\ \mathrm{eV}$.		
Oficiu	1p	**1p**
Problema 3 – Teoria Relativității Restrânse		**10p**
a) Coordonatele de poziție ale celor două stele față de sistemul S′ și indicațiile ceasornicului din S′ în momentele observărilor celor două explozii sunt: $$x'_P = x_P;\ y'_P = \frac{y_P - ut_P}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}};\ z'_P = z_P;$$ $$t'_P = \frac{t_P - \frac{\vec{r}_P \vec{u}}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}};\ \vec{r}_P \vec{u} = y_P u;$$ $$t'_P = \frac{t_P - \frac{u}{c^2} y_P}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}};$$ $$x'_Q = x_Q;\ y'_Q = \frac{y_Q - ut_Q}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}};\ z'_Q = z_Q;$$	3p	1,5p

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

$$t'_Q=\frac{t_Q-\dfrac{\vec r_Q\vec u}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}};\ \vec r_Q\vec u=y_Q u;$$ $$t'_Q=\frac{t_Q-\dfrac{u}{c^2}y_Q}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}.$$ Dacă pentru observatorul O din sistemul S intervalul de timp dintre explozii are durata $\Delta t=t_Q-t_P$, unde am admis că $t_Q>t_P$, atunci durata aceluiași interval, pentru observatorul din S′, este: $$\Delta t'=t'_Q-t'_P=\frac{\Delta t-\dfrac{u}{c^2}\Delta y}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}};\ \Delta y=y_Q-y_P.$$		
1) Dacă pentru observatorul din S′ cele două explozii se succed în aceeași ordine înseamnează că: $$\Delta t'>0;\ \frac{\Delta y}{\Delta t}<\frac{c^2}{u};\ u<\frac{c^2}{\dfrac{\Delta y}{\Delta t}}.$$		0,5p
2) Dacă pentru observatorul din S′ cele două explozii sunt simultane înseamnează că: $$\Delta t'=0;\ \frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{c^2}{u};\ u=\frac{c^2}{\dfrac{\Delta y}{\Delta t}}.$$		0,5p
3) Dacă pentru observatorul din S′ cele două explozii își schimbă ordinea de succesiune înseamnează că: $$\Delta t'<0;\ \frac{\Delta y}{\Delta t}>\frac{c^2}{u};\ u>\frac{c^2}{\dfrac{\Delta y}{\Delta t}}.$$		0,5p

b)	3p	
1) Ecuația traiectoriei lui A în raport cu sistemul S este: $$y = \frac{a}{2\mathrm{v}_0^2}x^2,$$ reprezentând ecuația unei parabole.		0,5p
2) Pentru a stabili ecuațiile parametrice ale mișcării lui A în raport cu sistemul S′, procedăm astfel: $$x = x'; y = \frac{y' + ut'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}};\ z = z';$$ $$t = \frac{t' + \frac{\vec{r}'\vec{u}}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}};\ \vec{r}'\vec{u} = y'u;$$ $$t = \frac{t' + \frac{u}{c^2}y'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}};$$		0,5p
$$x = \mathrm{v}_0 t; y = \frac{at^2}{2};$$ $$x' = \mathrm{v}_0\frac{t' + \frac{u}{c^2}y'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}};$$ $$\frac{y' + ut'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{a}{2}\left(\frac{t' + \frac{u}{c^2}y'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right)^2;$$ $$y' + ut' = \frac{a}{2\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\left(t' + \frac{u}{c^2}y'\right)^2;$$		0,25p

$$2y'\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}+2ut'\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}=at'^2+2\frac{aut'y'}{c^2}+\frac{au^2}{c^4}y'^2;$$

$$\frac{au^2}{c^4}y'^2-2\left(\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}-\frac{aut'}{c^2}\right)y'-\left(2ut'\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}-at'^2\right)=0;$$

$$y'=\frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}-\frac{aut'}{c^2}}{\frac{au^2}{c^4}}+\frac{\sqrt{\left(\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}-\frac{aut'}{c^2}\right)^2+\frac{au^2}{c^4}\left(2ut'\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}-at^2\right)}}{\frac{au^2}{c^4}};$$

$$y'=\frac{c^4}{au^2}\left[\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}-\frac{aut'}{c^2}+\right.$$

$$\left.+\sqrt{\left(\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\right)^2-2\frac{aut'}{c^2}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}+2\frac{au^3t'}{c^4}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right];$$

$$y'=\frac{c^4}{au^2}\left[\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}-\frac{aut'}{c^2}+\sqrt{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\left[\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}-2\frac{aut'}{c^2}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\right]}\right];$$

$$y'=\frac{c^4}{au^2}\left[\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}-\frac{aut'}{c^2}+\sqrt{\left(\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\right)^2\left(1-2\frac{aut'}{c^2}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\right)}\right];$$

$$y'=\frac{c^4}{au^2}\left[\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}-\frac{aut'}{c^2}+\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\sqrt{\left(1-2\frac{aut'}{c^2}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\right)}\right],$$

0,5p

reprezentând ecuația parametrică $y'=y'(t')$;

$$x'=\frac{v_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\left(t'+\frac{u}{c^2}y'\right);$$

$$x' = \frac{v_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\left[t' + \frac{c^2}{au}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} - t' + \frac{c^2}{au}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\sqrt{1-2\frac{aut'}{c^2}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right];$$ $$x' = \frac{v_0 c^2}{au}\left[1+\sqrt{1-2\frac{aut'}{c^2}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right],$$ reprezentând ecuația parametrică $x' = x'(t')$.		0,25p
3) Pentru a stabili ecuația traiectoriei lui A în raport cu S′ procedăm astfel: $$\sqrt{1-2\frac{aut'}{c^2}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{aux'}{v_0 c^2} - 1;$$ $$\frac{aut'}{c^2} = \frac{1-\left(\frac{aux'}{v_0c^2}-1\right)^2}{2\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}};$$ $$y' = \frac{c^4}{au^2}\left[\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} - \frac{1-\left(\frac{aux'}{v_0c^2}-1\right)^2}{2\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} + \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\left(\frac{aux'}{v_0c^2}-1\right)\right];$$ $$y' = \frac{c^4}{au^2}\frac{2\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)-1+\left(\frac{aux'}{v_0c^2}-1\right)^2+2\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\left(\frac{aux'}{v_0c^2}-1\right)}{2\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}};$$ $$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\left(\frac{a}{2v_0^2}x'^2 - \frac{u}{v_0}x'\right),$$ reprezentând ecuația unei parabole, diferită însă de aceea care s-ar obține în varianta nerelativă $(u \ll c)$:		1p

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

$y'_{\text{nerelativist}} = \dfrac{a}{2\mathrm{v}_0^2}x'^2 - \dfrac{u}{\mathrm{v}_0}x'.$		
c)	3p	

În mecanica relativistă, unde timpul absolut nu mai există, unde vitezele se compun după alte reguli decât în mecanica newtoniană, unde accelerația nu mai este aceeași în raport cu orice SRI și unde masa depinde de viteză, cu siguranță că este afectată și legea fundamentală a dinamicii, astfel încât relația dintre vectorul forță $\vec{F}$ și vectorul accelerație $\vec{a}$, într-un același SRI, în dinamica relativistă este alta decât în dinamica newtoniană.

Deoarece legea conservării impulsului este adevărată în raport cu orice SRI și în TRR, admitem că forma impulsului relativist al unei particule, în mișcare cu viteza $\vec{\mathrm{v}}$ față de sistemul inerțial OXYZ, este aceeași cu forma impulsului clasic, adică:

$$\vec{p} = m\vec{\mathrm{v}} = \frac{m_0\vec{\mathrm{v}}}{\sqrt{1-\dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}}},$$

unde m_0 este masa particulei în sistemul propriu (masa de repaus), iar m este masa particulei în mișcare cu viteza v;

$$\vec{\mathrm{v}} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t};$$

$$\vec{p} = \frac{m_0\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t\sqrt{1-\dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}}};$$

$$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}},$$

unde $\mathrm{d}\tau$ este variația timpului propriu din sistemul particulei, iar dt este timpul elementar din sisteul față de care particula este în mișcare;

$$\vec{p} = \frac{m_0\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}\tau},$$

expresie care, prin prezența lui $\mathrm{d}\tau$, ilustrează deosebirea dintre impulsul relativist și impulsul clasic, deosebire determinată de concepția despre timp în TRR.

În TRR se admite că forma legii fundamentale a dinamicii relativiste este aceeași cu forma legii fundamentale a dinamicii clasice, adică:

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t},$$

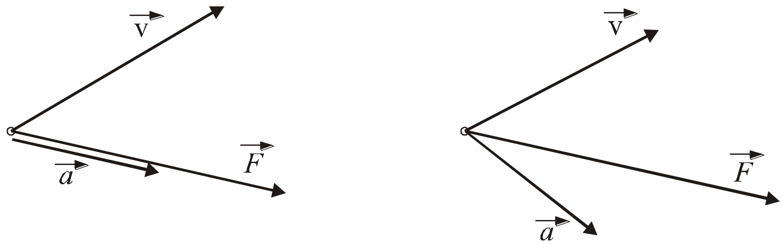
din care, utilizând expresia impulsului relativist rezultă:

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0\vec{\mathrm{v}}}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\right);$$

$$\vec{F} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{v}}}{\mathrm{d}t} + \frac{m_0}{\left(1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{\mathrm{v}}{c^2}\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{d}t}\vec{\mathrm{v}};$$

$$\vec{F} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\vec{a} + \frac{m_0}{\left(1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{\mathrm{v}}{c^2}\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{d}t}\vec{\mathrm{v}},$$

reprezentând ecuația vectorială a mișcării relativiste a unei particule, din care se constată că, spre deosebire de dinamica newtoniană (desenul *a*, fig. 1), în dimanica relativistă vectorul forță $\vec{F}$ are o componentă paraleă cu vectorul accelerație, $\vec{a}$, și o componentă paralelă cu vectorul viteză, $\vec{\mathrm{v}}$ (desenul *b*, fig. 1).



a *b*

Fig. 1

Având în vedere că:

$$\vec{F}\vec{\mathrm{v}} = \vec{\mathrm{v}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0\vec{\mathrm{v}}}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\right) =$$

$$= m_0\vec{\mathrm{v}}\left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{v}}}{\mathrm{d}t} + \vec{\mathrm{v}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\right)\right] =$$

1p

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

$$= m_0\vec{\mathrm{v}}\left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{v}}}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{2}\frac{\vec{\mathrm{v}}}{\left(1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)\right]=$$

$$=\frac{m_0}{\left(1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)^{3/2}}\left[\left(1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)\vec{\mathrm{v}}\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{v}}}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{2}\mathrm{v}^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)\right];$$

$$\vec{\mathrm{v}}\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{v}}}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{v}^2\right)=\frac{c^2}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right);$$

$$\vec{F}\vec{\mathrm{v}}=\frac{1}{2}\frac{m_0}{\left(1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)\left[c^2\left(1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)+\mathrm{v}^2\right];$$

$$\vec{F}\vec{\mathrm{v}}=\frac{1}{2}\frac{m_0c^2}{\left(1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right);$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\right)=\frac{1}{2}\frac{m_0c^2}{\left(1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right);$$

$$\vec{F}\vec{\mathrm{v}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\right);$$

$$\vec{\mathrm{v}}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t};$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\right)=\vec{F}\mathrm{d}\vec{r};$$

$$\frac{1}{2}\frac{m_0c^2}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)=\frac{m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}v\frac{dv}{dt};$$ $$\vec{F}\vec{v}=\frac{m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}v\frac{dv}{dt},$$ astfel încât, introducând în ecuația vectorială a mișcării relativiste, rezultă: $$\vec{F}=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\vec{a}+\frac{1}{c^2}\vec{v}\left(\vec{F}\vec{v}\right);$$ $$\vec{F}=m\vec{a}+\frac{\vec{v}}{c^2}\left(\vec{F}\vec{v}\right);$$ $$\vec{a}=\frac{1}{m}\vec{F}-\frac{\vec{F}\vec{v}}{mc^2}\vec{v},$$ reprezentând accelerația particulei în dinamica relativistă.		1p
1) În cazul particular al unei forțe perpendiculară pe direcția vectorului viteză $\left(\vec{F}\perp\vec{v}\right)$, rezultă: $$\vec{F}\vec{v}=0;\quad \vec{a}=\frac{\vec{F}}{m};$$ $$\vec{a}\,//\,\vec{F};\quad \vec{a}\perp\vec{v},$$ adică, în acest caz, accelerația se manifestă perpendicular pe direcția vectorului viteză; $$a=\frac{F}{m}=\frac{F}{\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}=\frac{F}{m_{\text{transversala}}};\quad m_{\text{transversală}}=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$		0,5p
2) În cazul particular al unei forțe paralelă cu direcția vectorului viteză, rezultă: $$\vec{F}\,//\,\vec{v};\quad \vec{F}\vec{v}=Fv;$$ $$\vec{a}=\frac{\vec{F}}{m}-\frac{\vec{v}}{mc^2}Fv;$$ $$\vec{F}=F\,\text{versor}\,\vec{F};\quad \vec{v}=v\,\text{versor}\,\vec{v};$$ $$\text{versor}\,\vec{F}=\text{versor}\,\vec{v};$$		0,5p

$\vec{a}=\frac{F}{m}\left(1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)\text{versor }\vec{F};\quad \vec{a}\,//\,\vec{F};\quad \vec{a}\,//\,\vec{\mathrm{v}},$ adică, în acest caz particular, accelerația se produce pe direcția vectorului viteză; $a=\frac{F}{m}\left(1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)=\frac{F}{\frac{m_0}{\left(1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)^{3/2}}}=\frac{F}{m_{\text{longitudinala}}};$ $m_{\text{longitudinală}}=\frac{m_0}{\left(1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)^{3/2}}.$		
Oficiu	1p	**1p**

Barem propus de:
Prof. Liviu ARICI – Colegiul Național „Nicolae Bălcescu”, Brăila
Prof. Florin BUTUŞINĂ – Colegiul Naţional „Simion Bărnuţiu”, Şimleu Silvaniei
Prof. Petrică PLITAN – Colegiul Național „Gheorghe Șincai”, Baia Mare
Prof. dr. Mihail SANDU – Liceul Tehnologic de Turism, Călimăneşti