Inspectoratul Şcolar Judeţean Dolj
Filiala Craiova a SSMR

Etapa locală a Olimpiadei naţionale de matematică
Clasa a X-a
Craiova, 9 februarie 2013
Soluţii

Problema 1.

Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x_1) = f(x_2)$. Deducem că $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, iar cum $g \circ f$ este injectivă avem că $x_1 = x_2$. Aşadar, f este injectivă.

Fie $y \in \mathbb{R}$. Din faptul că $f \circ g$ este surjectivă obţinem că există $x' \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(g(x')) = y$. Aşadar, există $x = g(x') \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = y$, deci f este surjectivă. In concluzie, f este bijectivă.

Fie $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât $g(y_1) = g(y_2)$. Folosind faptul că f este surjectivă, deducem că există $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x_1) = y_1$ si $f(x_2) = y_2$. Astfel, avem că $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, deci $x_1 = x_2$ şi $y_1 = y_2$. Am demonstrat astfel că g este injectivă.

Fie $x \in \mathbb{R}$ şi fie $y = f(x) \in \mathbb{R}$. Cum $f \circ g$ este surjectivă avem că există $x_1 \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(g(x_1)) = y$, deci $f(g(x_1)) = f(x)$. Folosind injectivitatea lui f obţinem că $g(x_1) = x$, adică g este surjectivă. In concluzie, f este bijectivă.

Problema 2.

Pentru că $abc = 1$, avem că două dintre numerele a, b, c sunt la fel aşezate faţă de 1, fie acestea a şi b. Obţinem astfel că $(a-1)(b-1) \geq 0$, adică

$$ab + 1 \geq a + b.$$

Inmulţind ultima inegalitate cu c deducem că

$$1 + c \geq ac + bc.$$

In concluzie, va fi suficient să arătăm că

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 1 + c + ab + a + b + c.$$

Demonstraţie se incheie pentru că ultima inegalitate se poate rescrie astfel

$$\left(a - \frac{b+1}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{b-1}{2}\right)^2 + (c-1)^2 \geq 0.$$

Problema 3.

Dacă vom nota prin $t = \left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x$ ecuaţia

$$\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x + \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x = 10$$

devine

$$t + \frac{1}{t} = 10.$$

Obţinem rădăcinile

$$t_{1,2} = 5 \pm 2\sqrt{6},$$

deci avem rădăcinile $x_{1,2} = \pm 2$.

Problema 4.

Rezolvând ecuaţia $z + \frac{1}{z} = 2\cos(x)$ obţinem că

$$z_{1,2} = \cos(x) \pm i\sin(x).$$

Deducem astfel că

$$z^n + z^{-n} = \cos(nx) + i\sin(nx) + \cos(nx) - i\sin(nx) = 2\cos(nx).$$

Inspectoratul Şcolar Judeţean Dolj
Filiala Craiova a SSMR

Etapa locală a Olimpiadei naţionale de matematică
Clasa a X-a
Craiova, 9 februarie 2013
Barem de corectare

Problema 1.

Problema 1.

Oficiu ________ 1p
Demonstrarea fapului că f este injectivă ________ 2p
Demonstrarea fapului că f este surjectivă ________ 2p
Demonstrarea fapului că g este injectivă ________ 2p
Demonstrarea fapului că g este surjectivă ________ 3p
Total ________ 10p

Problema 2.

Oficiu ________ 1p
Alegerea a două numere a şi b astfel încât $(a-1)(b-1) \geq 0$ ________ 2p
Deducerea inegalităţii $1 + c \geq ac + bc$ ________ 2p
Reducerea inegalităţii la forma $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 1 + c + ab + a + b + c$ 2p
Scrierea inegalităţii sub forma $\left(a - \frac{b+1}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{b-1}{2}\right)^2 + (c-1)^2 \geq 0$ ________ 3p
Total ________ 10p

Problema 3.

Oficiu ________ 1p
Considerarea notaţiei $t = \left(\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}\right)^x$ ________ 2p
Rescrierea ecuaţiei sub forma $t + \frac{1}{t} = 10$ ________ 3p
Rezolvarea ecuaţiei $t + \frac{1}{t} = 10$ ________ 2p
Deducerea rădăcinilor $x_{1,2} = \pm 2$ ________ 2p
Total ________ 10p

Problema 4.

Oficiu ________ 1p
Rezolvarea ecuaţiei şi deducerea soluţiilor $z_{1,2} = \cos(x) \pm i \sin(x)$ ________ 5p
Deducerea faptului că $z^n + z^{-n} = 2\cos(nx)$ ________ 4p
Total ________ 10p

Inspectoratul Şcolar Judeţean Dolj
Filiala Craiova a SSMR

Etapa locală a Olimpiadei naţionale de matematică
Clasa a X-a
Craiova, 9 februarie 2013

Problema 1.

Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $g \circ f$ este funcţie injectivă şi $f \circ g$ este funcţie surjectivă. Să se arate că f şi g sunt funcţii bijective.

***

Problema 2.

Fie $a, b, c > 0$, numere reale cu $abc = 1$. Să se arate că

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq ab + bc + ac + a + b + c.$$

G. M. C: 2697

Problema 3.

Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia

$$\left(\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}\right)^x + \left(\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}\right)^x = 10.$$

***

Problema 4.

Dacă $z + \frac{1}{z} = 2\cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$, să se calculeze $z^n + z^{-n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

***

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii;
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 1 la 10;
Timp de lucru: 3 ore.