OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală, 16.02.2014
Clasa a XII-a

Subiecte:

1. Pe $\mathbb{R}^*$ se consideră legea de compoziţie definită prin:

$$a \circ b = \begin{cases} \frac{a}{b}, & \text{dacă } a<0 \\ ab, & \text{dacă } a>0 \end{cases} \quad a, b \in \mathbb{R}^*.$$

a) Să se precizeze dacă $(\mathbb{R}^*, \circ)$ este grup.
b) Să se rezolve ecuaţia $a \circ x \circ a = b,\ a, b \in \mathbb{R}^*$.

2. Fie $a \in [0, \infty), f_a : [0, \infty) \to [0, \infty), f_a(x) = \frac{x+a}{ax+1}$ şi mulţimea $M = \{f_a |\ a \in [0, \infty)\}$.

a) Să se arate că M este parte stabilă faţă de operaţia de compunere a funcţiilor.
b) Să se arate că M este monoid comutativ împreună cu operaţia de compunere a funcţiilor şi să se determine elementele simetrizabile ale monoidului.

3. Să se determine funcțiile continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu proprietatea că admit o primitivă $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, astfel încât :
$F(x)+F([x])+F(\{x\}) = f(x)+f([x])+f(\{x\})+2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$,unde $[a]$ și $\{a\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului a.

Prof. Burtea Marius, Alexandria

4. Să se determine $x > 0$ care verifică relația $\int_x^{\ln 4} \frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} dt = \frac{\pi}{3}$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore. Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.

Barem clasa a XII-a

1. a) Asociativitate

Dacă $a > 0, b > 0, (a \circ b) \circ c = abc = a \circ (b \circ c)$

Dacă $a < 0, b > 0, (a \circ b) \circ c = \frac{a}{b} \circ c = \frac{a}{bc}$ iar $a \circ (b \circ c) = a \circ (bc) = \frac{a}{bc} = (a \circ b) \circ c$

Dacă $a > 0, b < 0, (a \circ b) \circ c = ab \circ c = \frac{ab}{c}$, iar $a \circ (b \circ c) = a \circ \left(\frac{b}{c}\right) = \frac{ab}{c} = (a \circ b) \circ c$

Dacă $a < 0, b < 0, a \circ (b \circ c) = a \circ \frac{b}{c} = \frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{ac}{b}$ iar

$(a \circ b) \circ c = \frac{a}{b} \circ c = \frac{ac}{b} = a \circ (b \circ c)$ deci legea este asociativă ……………….2p

Element neutru: $a \circ e = a$, dacă $a > 0 \Rightarrow ae = a$, deci $e = 1$, dacă $a < 0, \frac{a}{e} = a$

şi $e = 1$. Se verifică $1 \circ a = a$, deci $a \circ 1 = 1 \circ a = a$ şi $e = 1$ element neutru ..1p

Element simetrizabil

Se verifică $a' = \begin{cases} a & a<0 \\ \frac{1}{a} & a>0 \end{cases}$ ………………………………………………………….1p

Deci $(R^*, \circ)$ este grup.

b) $a \circ x \circ a = b \Rightarrow x = a' \circ b \circ a'$

Dacă $a > 0$ atunci $x = \frac{1}{a} \circ b \circ \frac{1}{a} = \frac{b}{a} \circ \frac{1}{a} = \begin{cases} b & dacă\ b<0 \\ \frac{b}{a^2} & dacă\ b>0 \end{cases}$ …………………………..1p

Dacă $a < 0$ atunci $x = a \circ b \circ a = \frac{a}{b} \circ a = \begin{cases} \frac{a^2}{b} & dacă\ b<0 \\ \frac{1}{b} & dacă\ b>0 \end{cases}$ ………………………..1p

2.a)

$(f_a \circ f_b)(x) = f_a\left(\frac{x+b}{bx+1}\right) = \frac{(1+ab)x+a+b}{(a+b)x+1+ab} = \frac{x+\frac{a+b}{1+ab}}{\frac{a+b}{1+ab}x+1} = f_{\frac{a+b}{1+ab}}(x), a, b \geq 0 \Rightarrow \frac{a+b}{1+ab} \geq 0,$

deci $f_{\frac{a+b}{1+ab}} \in M$ ……………………………………………………………………..3p

b) Din calculul de la a) rezultă comutativitatea ,iar compunerea funcţiilor este asociativă, elementul neutru este f_0, deci $(M, \circ)$ monoid comutativ ……….2p

Dacă $f_a \circ f_{a'} = f_0 \Rightarrow \frac{a+a'}{1+aa'} = 0, a + a' = 0$. Dar $a, a' \geq 0$, deci $a = a' = 0$ şi f_0 este singurul element simetrizabil. …………………………………………………2p

3, Pentru $x=0$ se obține că $F(0)=f(0)$ 1p
Pentru $x \to [x]$ se obține că $F([x])=f([x])+[x]$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.................... 1p
Pentru $x \to \{x\}$ se obține că $F(\{x\})=f(\{x\})+\{x\}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$......................1p
Înlocuind în relația dată în enunț se obține că $F(x)=f(x)+x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$..1p
Prin înmulțire cu e^{-x} această relație se aduce la forma:
$\left(e^{-x}F(x)\right)' = -xe^{-x}$, $\forall\, x \in R$..2p

Integrând prin părți funcția $h(x) = -xe^{-x}$, se obține că
$e^{-x}F(x) = (x+1)e^{-x} + C, \forall\, x \in \mathbb{R}$...
Așadar $F(x) = (x+1) + Ce^{x}, \forall\, x \in R$ și $f(x) = 1 + Ce^{x}, \forall\, x \in \mathbb{R}$..........1p
.

4. Cu notația $\sqrt{e^t - 1} = y$ va rezulta $\int_{\sqrt{e^x-1}}^{\sqrt{3}} \frac{2}{y^2+1}\,dy = \frac{\pi}{3}$ 3p

apoi $2arctg\sqrt{e^x-1} = \frac{\pi}{3}$ și $\sqrt{e^x-1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $e^x = \frac{4}{3}$ 3p

. $x = ln\frac{4}{3}$...1p