

Olimpiada de Matematică – etapa locală- Galați
16 februarie 2013
CLASA a VI-a

Problema 1.

a) Să se calculeze cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun al numerelor naturale 2016, 2160 și 2376.

b) Numerele naturale 2041, 2178 și 2390 împărțite la același număr natural dau resturile 25, 18 respectiv 14. Să se determine împărțitorul.

Romeo Zamfir, profesor, Galați

Problema 2.

Se consideră unghiurile adiacente \widehat{AOB} și \widehat{BOC} astfel încât $m(\widehat{AOB}) = 23^{\circ} 25' 45''$ și $m(\widehat{BOC}) = 33^{\circ} 45' 34''$. Să se calculeze:

a) $m(\widehat{AOC})$.

b) $m(\widehat{COM})$, știind că $[OM]$ este bisectoarea unghiului \widehat{BOC}

c) $m(\widehat{BOC}) - m(\widehat{AOB})$.

Romeo Zamfir, profesor, Galați

Problema 3.

a). Să se determine numerele naturale prime a, b, c , cu $a \leq b \leq c$, astfel încât

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{59}{70}.$$

Popa Vasile, profesor, Galați

b). Să se determine $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, știind că toate numerele de forma $n-1, n+5, n+11, n+17, n+23$ sunt numere prime pentru aceeași valoare a lui n , $n \geq 3$.

Manea Maricel, profesor, Galați

Problema 4.

Pe o dreaptă d se consideră punctele diferite $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{10}$, în această ordine, astfel încât lungimea segmentului $[A_0A_1]$ este o treime din lungimea segmentului $[A_0A_2]$, lungimea segmentului $[A_0A_2]$ este o treime din lungimea segmentului $[A_0A_3]$, lungimea segmentului $[A_0A_3]$ este o treime din lungimea segmentului $[A_0A_4]$, ..., lungimea segmentului $[A_0A_9]$ este o treime din lungimea segmentului $[A_0A_{10}]$. Fie $M_0, M_1, M_2, \dots, M_9$ respectiv mijloacele segmentelor $[A_0A_1], [A_1A_2], [A_2A_3], \dots, [A_9A_{10}]$. Știind că lungimea segmentului $[A_9A_{10}]$ este 118098 cm, să se calculeze:

a). lungimile segmentelor $[A_0A_1], [A_4A_5], [A_5A_6]$.

b). distanța dintre punctele M_4 și M_7 .

Viorica Bujor, profesor, Galați

Notă Toate problemele sunt obligatorii
Timp efectiv de lucru 2 ore
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

16 februarie 2013

Clasa a VI-a

Barem de evaluare

- ◆ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- ◆ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Nr. problemei	Soluție, rezolvare	Punctaj
1.	a) $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7,$ $2160 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5$ și $2376 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 11.$ $d = (2016, 2160, 2376) = 2^3 \cdot 3^2 = 72$ și $m = [2016, 2160, 2376] = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11.$	2p 1p 1p
	b). Fie x împărțitorul, $x \neq 0$. Din teorema împărțirii cu rest deducem că există numerele naturale a, b și c astfel încât $2041 = x \cdot a + 25,$ $2178 = x \cdot b + 18$ și $2390 = x \cdot c + 14,$ $x > 25.$ Avem că $2016 = x \cdot a,$ $2160 = x \cdot b,$ $2376 = x \cdot c,$ de unde obținem că x este divizor comun pentru numerele 2016, 2160 și 2376, deci x divide cel mai mare divizor al numerelor 2016, 2160 și 2376, adică x divide numărul 72. Cum $x > 25$ și x divide numărul 72, deducem $x = 36$ sau $x = 72.$	1p 1p 1p
2.	a) $m(\sphericalangle AOC) = 57^\circ 11' 19''$	2p
	b) $m(\sphericalangle COM) = 16^\circ 52' 47''$	2p
	c). $10^\circ 19' 49''$	3p
3.	$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{59}{70} \Leftrightarrow 70 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c) = 59 \cdot a \cdot b \cdot c.$ Dar $(59, 70) = 1 \Rightarrow 70 / a \cdot b \cdot c \Rightarrow 2 / a \cdot b \cdot c$	2p
	$\left. \begin{array}{l} 2 / a \cdot b \cdot c \\ a \leq b \leq c \\ a, b, c \text{ numere prime} \end{array} \right\} \Rightarrow a = 2 \Rightarrow 35 / b \cdot c \Rightarrow 5 / b \cdot c$ $\left. \begin{array}{l} 7 / b \cdot c \\ b \leq c \end{array} \right\} \Rightarrow b = 5; c = 7.$	2p

	<p>Cazul 1. $n = 5 \cdot k, k \in \mathbb{N}^*$. Atunci $n + 5 = 5 \cdot (k + 1) : 5$ (nu convine)</p> <p>Cazul 2. $n = 5 \cdot k + 1, k \in \mathbb{N}^*$. Atunci $n - 1 = 5 \cdot k$. Numărul $5 \cdot k$ este prim pentru $k = 1 \Rightarrow n = 6$; <i>Așadar</i>, pentru $n = 6$, <i>numerele prime sunt</i> : 5, 11, 17, 23, 29..</p> <p>Cazul 3. $n = 5 \cdot k + 2, k \in \mathbb{N}^*$. Atunci $n + 23 = 5 \cdot (k + 5) : 5$ (nu convine)</p> <p>Cazul 4. $n = 5 \cdot k + 3, k \in \mathbb{N}$. Atunci $n + 17 = 5 \cdot (k + 4) : 5$ (nu convine)</p> <p>Cazul 5. $n = 5 \cdot k + 4, k \in \mathbb{N}$. Atunci $n + 11 = 5 \cdot (k + 3) : 5$ (nu convine)</p> <p>Singura soluție este $n = 6$.</p>	<p>2p</p> <p>1p</p>
4.	<p>Fie $x > 0$ lungimea segmentului $[A_0A_1]$. Atunci:</p> <p>segmentul $[A_0A_2]$ are lungimea $3 \cdot x$,</p> <p>segmentul $[A_0A_3]$ are lungimea $9 \cdot x = 3^2 \cdot x$,</p> <p>segmentul $[A_0A_4]$ are lungimea $3 \cdot 9 \cdot x = 3^3 \cdot x$,</p> <p style="text-align: center;">⋮</p> <p>segmentul $[A_0A_{10}]$ are lungimea $3^9 \cdot x$</p> <p>Atunci lungimea segmentului $[A_9A_{10}]$ este $3^9 \cdot x - 3^8 \cdot x = 2 \cdot 3^8 \cdot x$.</p> <p>$2 \cdot 3^8 \cdot x = 118098 \Leftrightarrow 2 \cdot 3^8 \cdot x = 2 \cdot 59049 \Leftrightarrow$</p> <p>$3^8 \cdot x = 3^{10} \Leftrightarrow x = 9cm$.</p> <p>Lungimea segmentului $[A_0A_1]$ este 9 cm,</p> <p>Lungimea segmentului $[A_4A_5]$ este $3^4 \cdot x - 3^3 \cdot x = 2 \cdot 3^3 \cdot x$. Inlocuind pe x cu 9 cm, se obține 486 cm.</p> <p>Lungimea segmentului $[A_5A_6]$ este $3 \cdot 486 = 1458cm$.</p>	<p>1p</p> <p>2p</p> <p>1p</p>
	<p>Lungimea segmentului A_0M_0 este $\frac{x}{2}$</p> <p>Lungimea segmentului A_0M_1 este $2 \cdot x$;</p> <p>Lungimea segmentului A_0M_2 este $6 \cdot x = 3 \cdot (2 \cdot x)$;</p> <p>Lungimea segmentului A_0M_3 este $18 \cdot x = 3^2 \cdot (2 \cdot x)$;</p> <p>Lungimea segmentului A_0M_4 este $54 \cdot x = 3^3 \cdot (2 \cdot x)$;</p> <p>Lungimea segmentului A_0M_7 este $3^6 \cdot (2 \cdot x)$;</p> <p>Lungimea segmentului M_4M_7 este $3^6 \cdot (2 \cdot x) - 3^3 \cdot (2 \cdot x) = 3^3 \cdot 2 \cdot x \cdot (3^3 - 1)$.</p> <p>Înlocuind pe x cu 9 cm, se obține $3^5 \cdot 2 \cdot (3^3 - 1) = 486 \cdot 26 = 12636cm$.</p>	<p>1p</p> <p>1p</p>