



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Județeană și a Municipiului București, 19 martie 2016

CLASA a VII-a

Problema 1. Determinați numerele naturale nenule x și y care verifică relația

$$x + y = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{xy}.$$

Gazeta Matematică

Problema 2. Se consideră mulțimea

$$M = \{ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + 2015x_{2015} \mid x_1, x_2, \dots, x_{2015} \in \{-2, 3\} \}.$$

Arătați că $2015 \in M$ și $2016 \notin M$.

Problema 3. Se consideră triunghiul dreptunghic isoscel ABC cu $m(\widehat{BAC}) = 90^\circ$. Pe dreapta perpendiculară în B pe BC se consideră punctul D astfel încât $AD = BC$. Determinați măsura unghiului \widehat{BAD} .

Problema 4. Se consideră triunghiul ABC , cu $m(\widehat{A}) > 60^\circ$ și $m(\widehat{C}) > 30^\circ$. În semiplanul determinat de dreapta BC care nu conține punctul A , se consideră punctele D și E astfel încât $m(\widehat{ABE}) = m(\widehat{CBD}) = 90^\circ$ și $m(\widehat{BAE}) = m(\widehat{BCD}) = 60^\circ$. Se notează cu F și H mijloacele segmentelor $[AE]$, respectiv $[CD]$, iar cu G intersecția dreptelor AC și DE . Arătați că:

- $\triangle EBD \sim \triangle ABC$;
- $\triangle FGH \equiv \triangle ABC$.

Timp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Județeană și a Municipiului București, 19 martie 2016

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a VII-a

Problema 1. Determinați numerele naturale nenule x și y care verifică relația

$$x + y = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{xy}.$$

Gazeta Matematică

Soluția 1.

Scriind egalitatea sub forma $(x + y) - \sqrt{x} = \sqrt{xy} + \sqrt{y}$ și ridicând la pătrat, obținem $x^2 + xy + y^2 + x - y = 2(2y + x)\sqrt{x}$. Cum $2y + x \neq 0$, rezultă că $\sqrt{x} \in \mathbb{Q}$, deci x este pătrat perfect. Similar, y este pătrat perfect **2p**

Notând $\sqrt{x} = a$ și $\sqrt{y} = b$, egalitatea $a^2 + b^2 = ab + a + b$ conduce la $(a - b)^2 + (a - 1)^2 + (b - 1)^2 = 2$ **3p**
Obținem $(a, b) \in \{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$, pentru care $(x, y) \in \{(1, 4); (4, 1); (4, 4)\}$ **2p**

Soluția 2.

Înmulțind cu 2 egalitatea din enunț și trecând toți termenii în membrul stâng obținem:

$$(x - 2\sqrt{xy} + y) + x - 2\sqrt{x} + y - 2\sqrt{y} = 0, \text{ ceea ce se scrie } (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + (\sqrt{x} - 1)^2 + (\sqrt{y} - 1)^2 = 2 \text{ } \mathbf{3p}$$

Atunci $(\sqrt{x} - 1)^2 \leq 2$, de unde $\sqrt{x} \leq \sqrt{2} + 1$, adică $x \leq 3 + 2\sqrt{2}$, și, cum $x \in \mathbb{N}^*$, rezultă $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Similar, $y \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ **2p**

Studiind cazurile, se obțin soluțiile $(1, 4)$, $(4, 1)$ și $(4, 4)$ **2p**

Observație. Prima parte a soluției de mai sus poate fi înlocuită cu următoarea argumentație:

$$\text{Deoarece } \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}, \text{ din egalitatea din enunț rezultă } \frac{x+y}{2} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y} \text{ } \mathbf{1p}$$

$$\text{de unde } x - 2\sqrt{x} + y - 2\sqrt{y} \leq 0, \text{ adică } (\sqrt{x} - 1)^2 + (\sqrt{y} - 1)^2 \leq 2 \text{ } \mathbf{2p}$$

Problema 2. Se consideră mulțimea

$$M = \{ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + 2015x_{2015} \mid x_1, x_2, \dots, x_{2015} \in \{-2, 3\} \}.$$

Arătați că $2015 \in M$ și $2016 \notin M$.

Soluție.

Un număr întreg n aparține mulțimii M dacă există submulțimile disjuncte A și B ale mulțimii $S = \{1, 2, \dots, 2015\}$, cu $A \cup B = S$, astfel încât $-2a + 3b = n$, unde a este suma elementelor lui A și b este suma elementelor lui B (pentru mulțimea vidă se consideră că suma "elementelor" este 0) **2p**

Atunci $n = 5b - 2(a + b)$ și, cum $a + b = 1 + 2 + \dots + 2015$, rezultă că $n = 5b - 2015 \cdot 2016$ **1p**

Ca urmare, n este divizibil cu 5, deci $2016 \notin M$ **1p**

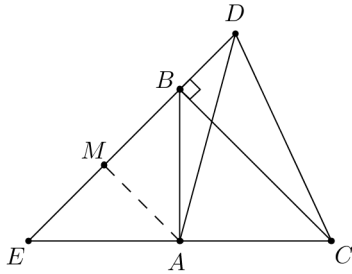
Pentru a arăta că $2015 \in M$, este suficient să găsim o submulțime $B \subset \{1, 2, \dots, 2015\}$ cu suma elementelor $b = \frac{1}{5}(2015 \cdot 2016 + 2015) = 403 \cdot 2017$ **1p**

Un exemplu se obține dacă B este reuniunea a 403 perechi de elemente din S care au suma 2017, de pildă $(2, 2015)$, $(3, 2014)$, ..., $(404, 1613)$.

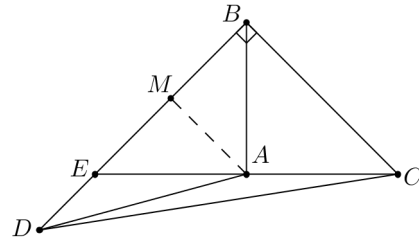
Considerând așadar $x_2 = x_3 = \dots = x_{404} = x_{1613} = x_{1614} = \dots = x_{2015} = 3$ și $x_1 = x_{405} = x_{406} = \dots = x_{1612} = -2$, obținem $2015 \in M$ **2p**

Problema 3. Se consideră triunghiul dreptunghic isoscel ABC cu $m(\widehat{BAC}) = 90^\circ$. Pe dreapta perpendiculară în B pe BC se consideră punctul D astfel încât $AD = BC$. Determinați măsura unghiului \widehat{BAD} .

Soluția 1.



Cazul 1



Cazul 2

Cazul 1. D și A sunt în semiplane diferite determinate de dreapta BC .

Notând $\{E\} = AC \cap DB$, rezultă că $m(\widehat{ABE}) = 45^\circ$, deci $[BA]$ este bisectoare și înălțime în triunghiul BEC . Ca urmare, $[AE] \equiv [AC]$ **1p**

Construind $AM \perp BE$, rezultă că $[AM]$ este linie mijlocie în triunghiul EBC , deci $AM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AD$ **1p**

În triunghiul dreptunghic MAD , cateta $[AM]$ este jumătate din ipotenuza $[AD]$, deci $m(\widehat{ADB}) = 30^\circ$ **1p**

Rezultă $m(\widehat{BAD}) = 180^\circ - m(\widehat{ADB}) - m(\widehat{ABD}) = 180^\circ - 30^\circ - 135^\circ = 15^\circ$ **1p**

Cazul 2. D și A sunt în același semiplan determinat de dreapta BC .

Notând $\{E\} = AC \cap DB$, rezultă că $m(\widehat{ABE}) = 45^\circ$, deci $[BA]$ este bisectoare și înălțime în triunghiul BEC . Ca urmare, $[AE] \equiv [AC]$ **1p**

Construind $AM \perp BE$, rezultă că $[AM]$ este linie mijlocie în triunghiul EBC , deci $AM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AD$. În triunghiul dreptunghic MAD , cateta $[AM]$ este jumătate din ipotenuza $[AD]$, deci $m(\widehat{ADB}) = 30^\circ$ **1p**

Rezultă $m(\widehat{BAD}) = 180^\circ - m(\widehat{ADB}) - m(\widehat{ABD}) = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ$ **1p**

Soluția 2.

Cazul 1. D și A sunt în semiplane diferite determinate de dreapta BC .

Construind dreptunghiul $BCFD$, rezultă că $[AD] \equiv [BC] \equiv [DF]$ **2p**

$\triangle ABD \equiv \triangle ACF$ (L.U.L.), de unde $[AD] \equiv [AF]$ și $\widehat{BAD} \equiv \widehat{CAF}$ **1p**

Cum $[AD] \equiv [AF]$ și $[AD] \equiv [DF]$, triunghiul ADF este echilateral, deci:

$$m(\widehat{BAD}) = \frac{1}{2} \left(90^\circ - m(\widehat{DAF}) \right) = 15^\circ \text{ } \mathbf{1p}$$

Cazul 2. D și A sunt în același semiplan determinat de dreapta BC .

Construind dreptunghiul $BCFD$, rezultă că $[AD] \equiv [BC] \equiv [DF]$ **2p**

$\triangle ABD \equiv \triangle ACF$ (L.U.L.), de unde $[AD] \equiv [AF]$ și $\widehat{BAD} \equiv \widehat{CAF}$ **1p**

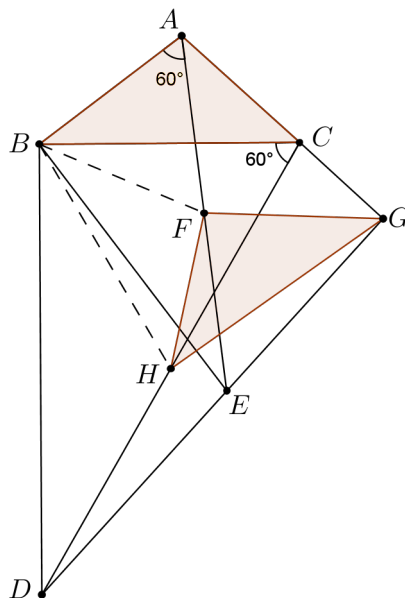
Cum $[AD] \equiv [AF]$ și $[AD] \equiv [DF]$, triunghiul ADF este echilateral, de unde:

$$m(\widehat{BAD}) = \frac{1}{2} \left(360^\circ - m(\widehat{DAF}) - m(\widehat{BAC}) \right) = 105^\circ \text{ } \mathbf{1p}$$

Problema 4. Se consideră triunghiul ABC , cu $m(\widehat{A}) > 60^\circ$ și $m(\widehat{C}) > 30^\circ$. În semiplanul determinat de dreapta BC care nu conține punctul A , se consideră punctele D și E astfel încât $m(\widehat{ABE}) = m(\widehat{CBD}) = 90^\circ$ și $m(\widehat{BAE}) = m(\widehat{BCD}) = 60^\circ$. Se notează cu F și H mijloacele segmentelor $[AE]$, respectiv $[CD]$, iar cu G intersecția dreptelor AC și DE . Arătați că:

- a) $\triangle EBD \sim \triangle ABC$;
- b) $\triangle FGH \equiv \triangle ABC$.

Soluție.



a) Din enunț rezultă că $\triangle ABE \sim \triangle CBD$, de unde $\frac{BE}{BD} = \frac{AB}{CB}$, adică $\frac{EB}{AB} = \frac{BD}{BC}$ **1p**

Deoarece unghiurile ABC și EBD au același complement, rezultă că $\widehat{ABC} \equiv \widehat{EBD}$, deci $\triangle EBD \sim \triangle ABC$ (L.U.L.) **1p**

b) Din $\triangle EBD \sim \triangle ABC$ avem $\widehat{ACB} \equiv \widehat{BDE}$, de unde rezultă că:

$$m(\widehat{DGC}) = 360^\circ - (m(\widehat{CBD}) + m(\widehat{BDE}) + m(\widehat{BCG})) = 360^\circ - (m(\widehat{CBD}) + m(\widehat{ACB}) + m(\widehat{BCG})) = 90^\circ \dots \text{1p}$$

$[GF]$ este mediană în triunghiul dreptunghic GAE , deci $GF = \frac{1}{2}AE$. Cum $[AB]$ se opune unui unghi de 30° în triunghiul dreptunghic BAE , rezultă $AB = \frac{1}{2}AE$, deci $[AB] \equiv [FG]$. Analog se arată că $[BC] \equiv [GH]$ **2p**

Din $\triangle FGH \equiv \triangle FBH$ (L.L.L.) rezultă că $m(\widehat{FGH}) = m(\widehat{FBH}) = 90^\circ - m(\widehat{HBD}) - m(\widehat{CBF})$.

Având în vedere că $m(\widehat{HBD}) = m(\widehat{HDB}) = 30^\circ$ și că $m(\widehat{CBF}) = m(\widehat{ABF}) - m(\widehat{ABC}) = 60^\circ - m(\widehat{ABC})$, obținem $m(\widehat{FGH}) = m(\widehat{ABC})$, de unde rezultă că $\triangle FGH \equiv \triangle ABC$ (L.U.L.) **2p**