OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală 09.02.2013
CLASA a IX-a

Subiectul 1 (7 puncte)

Să se determine toate perechile de numere întregi (x,y) care verifică relația:

$$x^3 + y^3 = (x+y)^2$$

Solutie şi barem

$x^3 + y^3 = (x+y)^2 \Leftrightarrow (x+y)(x^2 + y^2 - xy - x - y) = 0$ …………………1 punct

$x + y = 0$ sau $x^2 + y^2 - xy - x - y = 0$ ……………… …………...1 punct

Orice perche de numere întregi de forma (-k,k) este solutie …1 punct

$x^2 + y^2 - xy - x - y = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x - 2y + 2 = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ ……… 2 puncte

de unde se deduc celelalte solutii prin rationamente corecte,de exemplu:

$(x-1)^2 \le 2 \Leftrightarrow |x-1| \le \sqrt{2} \Leftrightarrow x-1 \in \{-1,0,1\} \Leftrightarrow x \in \{0,1,2\}$……………… 1 punct

Obtinerea celorlalte perechi care mai verifica relatia(în afara de cele de forma (-k,k)): (0,1),(1,0),(1,2),),(2,1),(2,2)..................................1 punct

Subiectul 2 (7 puncte)

Se consideră 24 de numere prime mai mari sau egale cu 5.Să se arate că suma pătratelor lor este divizibilă cu 24.

E:26526/ Gazeta Matematică nr.11/2011

Solutie şi barem

Un număr prim mai mare sau egal cu 5 este de forma 6k+1 sau 6k-1…2 puncte.

Fie deci $p_i, i \in \{1,2,...,24\}, p_i = 6k_i \pm 1$ cele 24 numere prime.

$\sum_{i=1}^{24} p_i^2 = \sum_{i=1}^{24} (6k_i \pm 1)^2 = 24 + 12\sum_{i=1}^{24} k_i(3k_i \pm 1)$ ....2 puncte

Este suficient să arătăm că $k_i(3k_i \pm 1)$ este par...1 punct

Daca k_i este par atunci $k_i(3k_i \pm 1)$ este par...1 punct

Daca k_i este impar atunci $3k_i \pm 1$ este par şi $k_i(3k_i \pm 1)$ este par...............1 punct.

Subiectul 3 (7 puncte)

Fie Δ ABC şi punctele E, F; E∈ (AB) şi F ∈ (AC), astfel încât $\frac{AE}{EB}=\frac{Fc}{AF}=\frac{1}{4}$
Dacă M este mijlocul lui AB, N mijlocul lui AC şi R mijlocul lui EF să se arate că punctele M, R şi N sunt coliniare.

Solutie şi barem

$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{BC}$ (1) ………………………………………………..…. 1p

$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{5}\cdot\overrightarrow{AB}$ ……………………………………………………….. 1p

$\overrightarrow{AF}=\frac{4}{5}\cdot\overrightarrow{AC}$ ……………………………………………………….. 1p

$\overrightarrow{MR}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}$)=

$\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{5}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\frac{1}{5}\overrightarrow{BA}+\frac{4}{5}\overrightarrow{AC}\right)=$

$\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\overrightarrow{BA}+\frac{4}{5}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{2}{5}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$ (2) ………………… 3p

Din (1) si (2) ⇒ M, R, N coliniare

Subiectul 4 (7 puncte)

Determinați numerele reale nenule $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$, astfel încât:

$$\frac{a_1+2a_2+3a_3+...+na_n}{a_1+a_2+a_3+...+a_n}=\frac{2n+1}{3},\ \forall n\geq 2.$$

Solutie şi barem

Soluție. Pentru n = 2, egalitatea din enunțul problemei, se scrie:

$$\frac{a_1+2a_2}{a_1+a_2}=\frac{5}{3},$$

care conduce la $a_2 = 2a_1$.

Pentru n = 3, egalitatea din enunțul problemei, se scrie:

$$\frac{a_1 + 2a_2 + 3a_3}{a_1 + a_2 + a_3} = \frac{7}{3},$$

care conduce la $a_3 = 3a_1$. .... **1 p**

Vom demonstra prin inducție matematică, că $a_n = n\, a_1, \forall n \geq 2$ **1p**

Evidentă egalitatea pentru n = 2.

Presupunem că $a_n = na_1$, şi demonstrăm că $a_{n+1} = (n + 1)a_1$ **1p**

Egalitatea dată pentru n + 1 numere, se scrie:

$$\frac{a_1 + 2a_2 + 3a_3 + ... + na_n + (n+1)a_{n+1}}{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + a_{n+1}} = \frac{2n+3}{3}, \text{..} \textbf{1p}$$

şi ținând seama de ipoteza din inducție, egalitatea devine succesiv :

$$\frac{a_1(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2) + (n+1)a_{n+1}}{a_1(1 + 2 + 3 + ... + n) + a_{n+1}} = \frac{2n+3}{3}, \text{..} \textbf{1p}$$

$$3\, a_1 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 3(n + 1)a_{n+1} = a_1(2n + 3) \cdot \frac{n(n+1)}{2} + (2n + 3)a_{n+1},$$

$$na_{n+1} = n(n + 1)a_1,$$

adică

$$a_{n+1} = (n + 1)\, a_1.$$

Ca urmare a celor de mai sus rezultă $a_n = n\, a_1, \forall n \geq 2$ **2p**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală 09.02.2013
CLASA a X-a

Subiectul 1 (7 puncte)

Să se rezolve în mulțimea numerelor reale sistemul:

$$3^x - 2^y = 19$$
$$3^y - 2^x = 19$$

Supliment Gazeta Matematică 11/2012

Solutie şi barem

Din $3^x - 2^y = 19$ şi $3^y - 2^x = 19$ rezultă $3^x - 2^y = 3^y - 2^x$ ....1 punct

Rezultă $2^x + 3^x = 2^y + 3^y$ ....1 punct

Funcția $f(x) = 2^x + 3^x, f : R \to R,$ este strict crescătoare deci injectivă...1 punct

Rezultă $x = y$ ....1 punct

Avem de rezolvat ecuația $3^x - 2^x = 19$.Observăm că $x = 3$ este soluție..1 punct

Scriem $2^x(\left(\frac{3}{2}\right)^x - 1) = 19$.Daca $x < 0$ membrul stang este negativ şi ecuația nu are soluție..1 punct

dacă $x \geq 0$ membrul stang este o funcție strict crescatoare,deci soluția $x = y = 3$ este unică...1 punct

Subiectul 2 (7 puncte)

a) Fie z_1 şi z_2 două numere complexe diferite astfel încât $|z_1| = |z_2|$.
Să se arate că $\forall \alpha \in R$ avem $|z_1 + \alpha z_2| = |z_2 + \alpha z_1|$.

b) Fie z_1 şi z_2 două numere complexe diferite.Să se arate că dacă există $\alpha \in R \setminus \{-1,1\}$ astfel încât $|z_1 + \alpha z_2| = |z_2 + \alpha z_1|$ atunci $|z_1| = |z_2|$.

Solutie şi barem

a) $|z_1| = |z_2| \Leftrightarrow |z_1|^2 = |z_2|^2 \Leftrightarrow z_1\overline{z_1} = z_2\overline{z_2}$ ....1 punct

$|z_1 + \alpha z_2| = |z_2 + \alpha z_1| \Leftrightarrow (z_1 + \alpha z_2)(\overline{z_1} + \alpha\overline{z_2}) = (z_2 + \alpha z_1)(\overline{z_2} + \alpha\overline{z_1})$ ...1 punct

$|z_1|^2 + \alpha^2|z_2|^2 + \alpha z_1\overline{z_2} + \alpha z_2\overline{z_1} = |z_2|^2 + \alpha^2|z_1|^2 + \alpha z_2\overline{z_1} + \alpha z_1\overline{z_2}$ adevarată .1 punct

b) $|z_1 + \alpha z_2| = |z_2 + \alpha z_1| \Leftrightarrow (z_1 + \alpha z_2)(\overline{z_1} + \alpha\overline{z_2}) = (z_2 + \alpha z_1)(\overline{z_2} + \alpha\overline{z_1})$ .1 punct

$|z_1|^2 + \alpha^2|z_2|^2 + \alpha z_1\overline{z_2} + \alpha z_2\overline{z_1} = |z_2|^2 + \alpha^2|z_1|^2 + \alpha z_2\overline{z_1} + \alpha z_1\overline{z_2}$ ....1 punct

$(1-\alpha^2)|z_1|^2 = (1-\alpha^2)|z_2|^2$ ....1 punct

Simplificare în condițiile date şi concluzia $|z_1| = |z_2|$.................1 punct

Subiectul 3 (7 puncte)

Dacă $z_i \in$ C, $i \in \{1,2,3,4\}$ sunt distincte si au proprietatile $z_1+z_3=z_2+z_4$ şi $z_1+iz_2=z_3+iz_4$, atunci $(\exists)$ z $\in$ C astfel incat $|z - z_1| = |z - z_2| = |z - z_3| = |z - z_4|$

Solutie şi barem

Fie $M_i\ (z_i)$, $i = \overline{1,4}$ …………………………………..…………… 1p

Din relația $z_1+z_3=z_2+z_4 \Rightarrow z_1-z_2=z_4-z_3 \Rightarrow$

$\Rightarrow |z_1 - z_2| = |z_4 - z_3| \Rightarrow M_1M_2=M_3M_4$ (a) …………………..………………. 1p

Din aceeasi relatie $z_1+z_3=z_2+z_4 \Rightarrow z_1-z_4=z_2-z_3 \Rightarrow$

$\Rightarrow |z_1 - z_4| = |z_2 - z_3| \Rightarrow M_1M_4=M_2M_3$ (b) ………………….……………. 1p

Din (a) si (b) $\Rightarrow$ patrulaterul $M_1M_2M_3M_4$ este paralelogram (c) ………… 1p

Din $z_1+iz_2=z_3+iz_4 \Rightarrow z_1-z_3=i(z_4-z_2) \Rightarrow$

$|z_1 - z_3| = |i(z_4 - z_2)| = |i| \cdot |z_4 - z_2| = |z_4 - z_2| \Rightarrow M_1M_3=M_2M_4$ (d)

……………………………………………… 1p

Din (c) si (d) $\Rightarrow$ paralelogramul $M_1M_2M_3M_4$ are diagonalele congruente

$\Rightarrow M_1M_2M_3M_4$ este dreptunghi $\Rightarrow MM_1=MM_2=MM_3=MM_4 \Rightarrow$

$|z - z_1| = |z - z_2| = |z - z_3| = |z - z_4|$ …………………………… 1p

Concluzie: z este afixul punctului M – centrul dreptunghiului

Subiectul 4   (7 puncte)

Fie a > 1 şi b≥ 0. Să se rezolve ecuația:

$$\log_{a^n+b} x = \log_{a^x+b} n,$$

unde $n \in N^*$.

Solutie şi barem

Soluție. Pentru $x \in (0,1)$,cum $a^n + b > 1$ şi $a^x + b > 1$ avem că $\log_{a^n+b} x < 0$ şi $\log_{a^x+b} n \geq 0$ ecuația este imposibilă……………………………………………………………**1p**

Pentru $x \geq 1$ ecuația se mai scrie sub forma

$$\log_{a^n+b} x = \frac{\log_{a^n+b} n}{\log_{a^n+b}(a^x+b)} \Leftrightarrow (\log_{a^n+b} x)\log_{a^n+b}(a^x+b) = \log_{a^n+b} n.$$ …………………………..**2p**

Deoarece $x \geq 1$ avem că $a^x + b > 1, a^n > 1$ şi atunci $\log_{a^n+b} x > 0, \log_{a^n+b}(a^x + b) > 0.$

Funcția $f: R \to R, f(x) = (\log_{a^n+b} x)\log_{a^n+b}(a^x+b)$ este strict crescătoare ca produs de funcții strict crescătoare cu valori pozitive, deci injectivă.

Atunci ecuația $f(x) = \log_{a^n+b} n$ are soluție unică……………………………………………….**3p**

Se verifică uşor că x = n este soluție a ecuației date……………………………………………**1p**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală 09.02.2013
CLASA a XI-a

Subiectul 1 (7 puncte)

Să se calculeze: $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-\sqrt[3]{n^3+n^2})$

Solutie şi barem

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-\sqrt[3]{n^3+n^2})=\lim_{n\to\infty}[(\sqrt{n^2+n}-n)-(\sqrt[3]{n^3+n^2}-n)]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)-\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3+n^2}-n)$$ ....2 puncte

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1)}=\frac{1}{2}$$ ...2 puncte

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3+n^2}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+n^2-n^3}{\sqrt[3]{(n^3+n^2)^2}+n\sqrt[3]{n^3+n^2}+n^2}=$$

.........2 puncte

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2(\sqrt[3]{(1+\frac{1}{n})^2}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}+1)}=\frac{1}{3}$$

Finalizare: limita din enunț este egala cu $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ ....1 punct

Subiectul 2 (7 puncte)

Se dă matricea $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.Să se calculeze $A^n, n\in N^*$

Solutie şi barem

Avem $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\sqrt{2}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$ ....2 puncte

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\sqrt{2}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}=\sqrt{2}\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4}\\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}$$ ....2 punct

$$A^n=\sqrt{2^n}\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4}\\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}^n=\sqrt{2^n}\begin{pmatrix}\cos\frac{n\pi}{4} & -\sin\frac{n\pi}{4}\\ \sin\frac{n\pi}{4} & \cos\frac{n\pi}{4}\end{pmatrix}$$ ....3 puncte

<u>Subiectul 3 (7 puncte)</u>

Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale strict pozitive astfel încât $(n+1)\,x_{n+1}-nx_n<0$, $(\forall)n\in\mathbb{N}^*$. Să se arate că şirul este monoton şi mărginit şi are limita 0.

<u>Solutie şi barem</u>

$(n+1)\,x_{n+1}-nx_n<0$ daca si numai daca $\frac{x_{n+1}}{x_n}<\frac{n}{n+1}<1$, $(\forall)n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow$

$\Rightarrow x_{n+1}<x_n$, $(\forall)n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow (x_n)\searrow$ ……………………………………………… 2p

Din relatia $(n+1)\,x_{n+1}-nx_n<0$ $x_{n+1}<\frac{n}{n+1}\cdot x_n$, $(\forall)n\in\mathbb{N}^*$

$\Rightarrow x_2<\frac{1}{2}x_1$

$x_3<\frac{2}{3}x_2$

.

.

.

$x_{n-1}<\frac{n-2}{n-1}\cdot x_{n-2}$

$x_n<\frac{n-1}{n}\cdot x_{n-1}$ ………………………………………………………… 2p

“. ”

$\Rightarrow x_n < \frac{1}{n} x_1 < x_1$ ……………………………………………….. 1p

Deci, $x_n \in (0, x_1)$ $\Rightarrow (x_n)_{n \in N^*}$ este marginit

$0 < x_n < \frac{1}{n} \cdot x_1 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} x_n = 0$ ………………….. 2p

Subiectul 4 (7 puncte)

Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{C_n^1+\frac{1}{2}C_n^2+...+\frac{1}{n}C_n^n}{2^2+\frac{1}{2}2^3+...+\frac{1}{n}2^{n+1}}.$$

Solutie şi barem

Soluție. Notând $x_n=C_n^1+\frac{1}{2}C_n^2+...+\frac{1}{n}C_n^n, y_n=2^2+\frac{1}{2}2^3+...+\frac{1}{n}2^{n+1}$, y_n crescator ($y_{n+1}-y_n=\frac{2^{n+2}}{n+1}>0$) şi nemărginit $\left(y_n>\frac{2^{n+1}}{n+1}\to\infty\right)$ **1p**

Conform lemei Stoltz-Cesaro, avem:

$$\lim_n\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\lim_n\frac{C_{n+1}^1+\frac{1}{2}C_{n+1}^2+...+\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{n+1}-C_n^1-\frac{1}{2}C_n^2-...-\frac{1}{n}C_n^n}{\frac{1}{n+1}2^{n+2}}=$$ **1p**

$$\lim_n\frac{C_{n+1}^1-C_n^1+\frac{1}{2}(C_{n+2}^2-C_n^2)+...+\frac{1}{n}(C_{n+1}^n-C_n^n)+\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{n+1}}{\frac{1}{n+1}2^{n+2}}=$$ **1p**

$$\lim_n\frac{C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1+...+\frac{1}{n}C_n^1+\frac{1}{n+1}C_n^n}{\frac{1}{n+1}2^{n+2}}=\lim_n\frac{\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}C_n^k}{\frac{1}{n+1}2^{n+2}}=\lim_n\frac{\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}}{\frac{1}{n+1}2^{n+2}}=$$ **3p**

$$\lim_n\frac{\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}C_{n+1}^{k+1}}{\frac{1}{n+1}2^{n+2}}=\lim_n\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+2}}=\frac{1}{2}.$$ **1p**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală 09.02.2013
CLASA a XII-a

Subiectul 1 (7 puncte)

Fie $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} / a,b,c\in R\right\}$.

a) Să se arate că G este parte stabilă în raport cu operația de înmulțire a matricilor.

b) Să se arate că dacă $a,b,c\in R$ atunci există $x,y,z\in R$ astfel încât:

$$(a^3+b^3+c^3-3abc)^n=x^3+y^3+z^3-3xyz$$

Solutie şi barem

Fie $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ c_1 & a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 & a_1 \end{pmatrix}$, $A,B\in G,a,b,c,a_1,b_1,c_1\in R$.....1 punct

$$AB=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ c_1 & a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 & a_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} aa_1+bc_1+cb_1 & ab_1+ba_1+cc_1 & ac_1+bb_1+ca_1 \\ ca_1+ac_1+bb_1 & cb_1+aa_1+bc_1 & cc_1+ab_1+ba_1 \\ ba_1+cc_1+ab_1 & bb_1+ca_1+ac_1 & bc_1+cb_1+aa_1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}\in G$$

....2 puncte

b) Fie $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.Atunci $\det A=a^3+b^3+c^3-3abc$ ....1 punct

Avem: $(a^3+b^3+c^3-3abc)^n=(\det A)^n=\det A^n$ ....1 punct

Datorită punctului a) matricea $A^n\in G$, deci $A^n=\begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}$................1 punct

$(a^3+b^3+c^3-3abc)^n=(\det A)^n=\det A^n=x^3+y^3+z^3-3xyz$......................1 punct

Subiectul 2 (7 puncte)

Fie $I_n = \int_0^{\pi} e^x \cos nx dx, n \in N^*$

a) Să se calculeze I_1.

b) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} I_n$

Gazeta Matematică nr.1/2012

Solutie şi barem

a)

$$I_1 = \int_0^{\pi} e^x \cos x dx = \int_0^{\pi} (e^x)' \cos x dx = e^x \cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^x \sin x dx = -e^{\pi} - 1 + \int_0^{\pi} (e^x)' \sin x dx. = \text{..2puncte}$$

$= -e^{\pi} - 1 + e^x \sin x\Big|_0^{\pi} - I_1$ de unde $I_1 = -\frac{1+e^{\pi}}{2}$ ....1 punct

b) Fie $J_n = \int_0^{\pi} e^x \sin nx dx$ Se demonstrează analog ca la b) ca $|J_n| \le 80$ .... 2 puncte

$$|I_n| = \left|\int_0^{\pi} e^x \cos nx dx\right| = \left|\frac{1}{n}\int_0^{\pi} e^x (\sin nx)' dx\right| = \left| \frac{1}{n}(e^{\pi} \sin n\pi - e^0 \sin 0 - \int_0^{\pi} e^x \sin nx dx)\right| =$$

$$= \frac{1}{n}|-j_n| = \frac{1}{n}|J_n| \le 80 \cdot \frac{1}{n} \to 0$$

Deci $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$ .... 2 puncte

Subiectul 3 (7 puncte)

Să se determine funcțiile $f: R \to R$, care admit primitive şi au proprietatea că $(f \circ f)(x) = -x^3, \forall x \in R.$

Solutie şi barem

Dacă f are primitive atunci are proprietatea lui Darboux............1 punct
Dacă $f(x) = f(y) \Rightarrow f(f(x)) = f(f(y)) \Rightarrow -x^3 = -y^3 \Rightarrow x = y$,
deci f este injectivă...2 puncte
Dacă f are proprietatea lui Darboux şi este injectivă atunci este strict monotonă.. .2 puncte
Dacă f este strict monotonă atunci $f \circ f$ este strict crescătoare..1 punct
Funcția $g: R \to R, g(x) = -x^3$ este strict descrescătoare
Concluzia: nu există funcții cu proprietatea cerută ....1 punct

Subiectul 4 (7 puncte)

Să se calculeze integrala:

$$\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{x^n}{x^{3n+1}+x^{2n+2}+x^{2n}+x^{n+1}+x^{n-1}+1}dx,$$

unde $a>0, n\in N^*$.

Soluție. 1) Pentru a = 1 integrala este egală cu zero.

2) Pentru $a\neq 1$ integrala dată se rescrie: $I=\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{x^n dx}{\left(x^{2n+2}+x^{n+1}+1\right)\left(x^{n-1}+1\right)}$.……………….**1p**

Efectuând schimbarea de variabilă $x=\frac{1}{t}\Rightarrow dx=-\frac{1}{t^2}dt$, obținem că………………………....**1p**

$$I=-\int_{a}^{\frac{1}{a}}\frac{\frac{1}{t^n}\cdot\frac{dt}{t^2}}{\left(\frac{1}{t^{2n+2}}+\frac{1}{t^{n+1}}+1\right)\left(\frac{1}{t^{n-1}}+1\right)}=\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{x^{2n-1}dx}{\left(x^{2n+2}+x^{n+1}+1\right)\left(x^{n-1}+1\right)}=\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{x^n x^{n-1}dx}{\left(x^{2n+2}+x^{n+1}+1\right)\left(x^{n-1}+1\right)}=$$

$$\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{x^n}{x^{2n+2}+x^{n+1}+1}\cdot\frac{x^{n-1}}{x^{n-1}+1}dx=\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{x^n}{x^{2n+2}+x^{n+1}+1}\left(1-\frac{1}{x^{n-1}+1}\right)dx=\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{x^n dx}{x^{2n+2}+x^{n+1}+1}-$$

$$-\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{x^n dx}{\left(x^{2n+2}+x^{n+1}+1\right)\left(x^{n+1}+1\right)}=\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{x^n dx}{x^{2n+2}+x^{n+1}+1}-I\Rightarrow I=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{x^n dx}{x^{2n+2}+x^{n+1}+1}.$$ ……………….**3p**

Efectuăm schimbarea de variabilă $x^{n+1}=t\Rightarrow (n+1)x^n dx=dt$, şi atunci: ………………..**1p**

$$I=\frac{1}{2(n+1)}\int_{\frac{1}{a^{n+1}}}^{a^{n+1}}\frac{dt}{t^2+t+1}=\frac{1}{2(n+1)}\int_{\frac{1}{a^{n+1}}}^{a^{n+1}}\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{\sqrt{3}(n+1)}arctg\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\Bigg|_{\frac{1}{a^{n+1}}}^{a^{n+1}}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}(n+1)}\left(artg\frac{2a^{n+1}+1}{\sqrt{3}}-arctg\frac{\frac{2}{a^{n+1}}+1}{\sqrt{3}}\right).$$ …………………………………………………..**1p**