OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - BRĂILA, 22 februarie 2015
CLASA A X-A

1. Se dau relațiile

$$5\left[(x+y)^2+\log_2^2 y\right]=\left[x+\log_2\left(2^y\cdot y^2\right)\right]^2 \quad (1)$$

și

$$4^y=4y(3x+4). \quad (2)$$

a) Să se demonstreze că nu există $x, y \in (0,+\infty)$ care verifică relația (1).

b) Să se determine $x, y \in \mathbb{R}$ care verifică simultan relațiile (1) și (2).

Gabriel Daniilescu, Brăila

2. Determinați perechile de numere complexe (u,v) cu $|u|=|v|=1$ astfel încât

$$|1-u|+\left|v^2+1\right|=|1-v|+\left|u^2+1\right|=\sqrt{2}.$$

Marius Damian, Brăila

3. Fie $m,n\in\mathbb{N}$, $m,n\geq 2$ și $x_1,x_2,x_3,x_4\in[0,+\infty)$ astfel încât $x_1+x_2+x_3+x_4=4$.

a) Demonstrați că $\sqrt[m]{x_1}\cdot\sqrt[n]{x_2}+\sqrt[m]{x_2}\cdot\sqrt[n]{x_3}+\sqrt[m]{x_3}\cdot\sqrt[n]{x_4}+\sqrt[m]{x_4}\cdot\sqrt[n]{x_1}\leq 4.$

b) Când are loc egalitatea la a)?

Gheorghe Alexe, Brăila

4. Să se determine toate funcțiile $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ care îndeplinesc condiția:

$$x+\sqrt{x}-f(x)=\sqrt{f(f(x))},\ \forall x\in\mathbb{N}.$$

Gabriel Daniilescu, Brăila

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - BRĂILA, 22 februarie 2015
CLASA A X-A

1. Se dau relațiile

$$5\left[(x+y)^2+\log_2^2 y\right]=\left[x+\log_2\left(2^y\cdot y^2\right)\right]^2 \quad (1)$$

și

$$4^y=4y(3x+4). \quad (2)$$

a) Să se demonstreze că nu există $x, y\in(0,+\infty)$ care verifică relația (1).

b) Să se determine $x, y\in\mathbb{R}$ care verifică simultan relațiile (1) și (2).

Gabriel Daniilescu, Brăila

Soluție.

$$5\left[(x+y)^2+\log_2^2 y\right]=\left[x+\log_2\left(2^y\cdot y^2\right)\right]^2 \Leftrightarrow 5\left[(x+y)^2+\log_2^2 y\right]=(x+y+2\log_2 y)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5\left[(x+y)^2+\log_2^2 y\right]=(x+y+2\log_2 y)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5(x+y)^2+5\log_2^2 y=(x+y)^2+4(x+y)\log_2 y+4\log_2^2 y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4(x+y)^2-4(x+y)\log_2 y+\log_2^2 y=0 \Leftrightarrow \left[2(x+y)-\log_2 y\right]^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(x+y)=\log_2 y,$$

unde $x\in\mathbb{R}$ și $y\in(0,+\infty)$.

a) Vom demonstra că $y>\log_2 y,\ \forall y\in(0,+\infty) \Leftrightarrow 2^y>y,\ \forall y\in(0,+\infty)$.

Notăm $[y]=n\in\mathbb{N} \Rightarrow n\le y<n+1 \Rightarrow 2^n\le 2^y<2^{n+1}$. Se demonstrează ușor prin inducție că $2^n\ge n+1$, $\forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow 2^y\ge 2^n\ge n+1>y \Rightarrow 2^y>y \Rightarrow y>\log_2 y,\ \forall y\in(0,+\infty)$.

Dar $2(x+y)>y,\ \forall x,y\in(0,+\infty) \Rightarrow 2(x+y)>\log_2 y \Rightarrow \forall x,y\in(0,+\infty)$ egalitatea $2(x+y)=\log_2 y$ nu poate avea loc.

b) (1) $\Leftrightarrow 2x+2y=\log_2 y \Leftrightarrow 2x=\log_2 y-2y \Leftrightarrow 2x=\log_2 y-\log_2 2^{2y} \Leftrightarrow 2x=\log_2\dfrac{y}{2^{2y}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2^{2x}=\frac{y}{2^{2y}} \Leftrightarrow 4^x=\frac{y}{4^y} \Leftrightarrow \frac{4^y}{y}=\frac{1}{4^x}.$$

Din (1) și (2) obținem $\frac{1}{4^x}=4(3x+4)\Leftrightarrow\left(\frac{1}{4}\right)^x=4(3x+4).$

Notăm $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ și $g(x)=4(3x+4)$ cu f strict desccrescătoare și g strict crescătoare, deci ecuația $f(x)=g(x)$ are cel mult o soluție. Dar $f(-1)=g(-1)=4\Rightarrow x=-1$ este soluția unică a ecuației $\left(\frac{1}{4}\right)^x=4(3x+4).$ Pentru $x=-1$ obținem $4^y=4y.$

Notăm $h_1,h_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ h_1(y)=4^y$ și $h_2(y)=4y$ cu h_1 funcție convexă și h_2 funcție liniară, deci ecuația $h_1(y)=h_2(y)$ are cel mult două soluții. Dar $h_1\left(\frac{1}{2}\right)=h_2\left(\frac{1}{2}\right)=2$ și $h_1(1)=h_2(1)=4\Rightarrow$ ecuația $4^y=4y$ are soluțiile $y_1=\frac{1}{2}$ și $y_2=1.$

Deci $(x,y)\in\left\{\left(-1,\frac{1}{2}\right),(-1,1)\right\}.$

2. Determinați perechile de numere complexe (u,v) cu $|u|=|v|=1$ astfel încât

$$|1-u|+|v^2+1|=|1-v|+|u^2+1|=\sqrt{2}.$$

Marius Damian, Brăila

Soluție algebrică. Fie $u=a+bi$ cu $a^2+b^2=1$ și $v=c+di$ cu $c^2+d^2=1.$ Atunci

$|1-u|+|v^2+1|=\sqrt{2}\Leftrightarrow|1-a-bi|+|c^2+2cdi-d^2+1|=\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{(1-a)^2+b^2}+|2c^2+2cdi|=\sqrt{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sqrt{1-2a+a^2+b^2}+2|c|\cdot|c+di|=\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{2-2a}+2|c|=\sqrt{2},$ deci $2-2a\ge0\Leftrightarrow a\le1$ și $\sqrt{2-2a}\le\sqrt{2}\Leftrightarrow2-2a\le2\Leftrightarrow a\ge0,$ deci $a\in[0,1].$ Analog $\sqrt{2-2c}+2|a|=\sqrt{2}\Rightarrow c\in[0,1].$

$$\begin{cases}\sqrt{2-2a}+2c=\sqrt{2}\\ \sqrt{2-2c}+2a=\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow\sqrt{2-2a}+2c=\sqrt{2-2c}+2a\Leftrightarrow\sqrt{2-2a}-\sqrt{2-2c}=2a-2c\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2-2a-2+2c}{\sqrt{2-2a}+\sqrt{2-2c}}=2a-2c\Rightarrow a=c.$$

Astfel, $\sqrt{2-2a}+2a=\sqrt{2}\Rightarrow\sqrt{2-2a}=\sqrt{2}-2a$ cu $\sqrt{2}-2a\ge0\Rightarrow a\le\frac{\sqrt{2}}{2}$ și $2-2a=2-4\sqrt{2}a+4a^2\Rightarrow4a^2=4\sqrt{2}a-2a.$

I. $a=0;$

II. $a \neq 0 \Rightarrow 4a = 4\sqrt{2} - 2 \Leftrightarrow a = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$. Dar $\sqrt{2} - \frac{1}{2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2\sqrt{2} - 1 \leq \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} \leq 1$, fals!

Deci $a = c = 0$, $b = \pm 1$, $d = \pm 1$.

Problema are patru soluții: $(u,v) \in \{(i,i),(-i,i),(i,-i),(-i,-i)\}$.

Soluție trigonometrică. Scriem u,v în formă trigonometrică. Există $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$ astfel încât $u = \cos\alpha + i\sin\alpha$ și $v = \cos\beta + i\sin\beta$.

Atunci $\frac{\alpha}{2} \in [0,\pi) \Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2} \in [0,1]$ și $\frac{\beta}{2} \in [0,\pi) \Rightarrow \sin\frac{\beta}{2} \in [0,1]$, deci

$$|1-u| = |(1-\cos\alpha) - i\sin\alpha| = \sqrt{2-2\cos\alpha} = \sqrt{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} = 2\sin\frac{\alpha}{2}$$

și analog $|1-v| = 2\sin\frac{\beta}{2}$.

De asemenea,

$|u^2+1| = |(1+\cos 2\alpha) + i\sin 2\alpha| = \sqrt{2+2\cos 2\alpha} = \sqrt{4\cos^2\alpha} = 2|\cos\alpha| = 2\left|1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right|$ și analog

$|v^2+1| = 2\left|1-2\sin^2\frac{\beta}{2}\right|$.

Prin urmare, folosind și ipoteza, avem:

$$2\sqrt{2} = |1-u| + |1-v| + |u^2+1| + |v^2+1| = \left(2\sin\frac{\alpha}{2} + 2\left|1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right|\right) + \left(2\sin\frac{\beta}{2} + 2\left|1-2\sin^2\frac{\beta}{2}\right|\right). \quad (1)$$

Dar

$$2\sin\frac{\alpha}{2} + 2\left|1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right| = \begin{cases} 2\sin\frac{\alpha}{2} + 2 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}, \text{ dacă } \frac{\alpha}{2} \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4},\pi\right] \\ 2\sin\frac{\alpha}{2} + 4\sin^2\frac{\alpha}{2} - 2, \text{ dacă } \frac{\alpha}{2} \in \left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right) \end{cases}$$

deci apar cazurile:

- Dacă $\frac{\alpha}{2} \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$, atunci

$$E(\alpha) = 2\sin\frac{\alpha}{2} + 2\left|1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right| = 2\sin\frac{\alpha}{2} + 2 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{9}{4} - \left(\frac{1}{2} - 2\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2.$$

Cum $\sin\frac{\alpha}{2} \in \left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, avem $E(\alpha) \in [\sqrt{2}, 2]$.

- Dacă $\frac{\alpha}{2}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$, atunci

$$E(\alpha)=2\sin\frac{\alpha}{2}+2\left|1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right|=2\sin\frac{\alpha}{2}+4\sin^2\frac{\alpha}{2}-2=\left(2\sin\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}.$$

Cum $\sin\frac{\alpha}{2}\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$, avem $E(\alpha)\in\left(\sqrt{2},4\right)$.

Cele două cazuri analizate spun că expresia

$$E(\alpha,\beta)=\left(2\sin\frac{\alpha}{2}+2\left|1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right|\right)+\left(2\sin\frac{\beta}{2}+2\left|1-2\sin^2\frac{\beta}{2}\right|\right)$$

are valoarea minimă $\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$, iar aceasta este atinsă dacă și numai dacă $\alpha,\beta\in\left\{\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right\}$.

Ținând cont de (1), deducem că există exact patru triplete de numere complexe (u,v) care verifică ipoteza, anume $(u,v)\in\{(i,i),(-i,i),(i,-i),(-i,-i)\}$.

3. Fie $m,n\in\mathbb{N}$, $m,n\geq 2$ și $x_1,x_2,x_3,x_4\in[0,+\infty)$ astfel încât $x_1+x_2+x_3+x_4=4$.

a) Demonstrați că $\sqrt[m]{x_1}\cdot\sqrt[n]{x_2}+\sqrt[m]{x_2}\cdot\sqrt[n]{x_3}+\sqrt[m]{x_3}\cdot\sqrt[n]{x_4}+\sqrt[m]{x_4}\cdot\sqrt[n]{x_1}\leq 4$.

b) Când are loc egalitatea la a)?

Gheorghe Alexe, Brăila

Soluție. a) $\begin{cases}\sqrt[m]{x_1}\leq\frac{m-1+x_1}{m}\\ \sqrt[n]{x_2}\leq\frac{n-1+x_2}{n}\end{cases}$

$$=>\sqrt[m]{x_1}\cdot\sqrt[n]{x_2}\leq\frac{(m-1+x_1)(n-1+x_2)}{m\cdot n}\leq$$
$$\leq\frac{(m-1)(n-1)+(m-1)x_2+(n-1)x_1+x_1\cdot x_2}{m\cdot n}$$

Atunci avem

$$\sqrt[m]{x_1}\cdot\sqrt[n]{x_2}+...+\sqrt[m]{x_4}\cdot\sqrt[n]{x_1}\leq$$
$$\leq\frac{4(m-1)(n-1)+[(m-1)+(n-1)](x_1+x_2+x_3+x_4)+(x_1+x_3)(x_2+x_4)}{m\cdot n}$$
$$(x_1+x_3)(x_2+x_4)\leq\left[\frac{(x_1+x_3)+(x_2+x_4)}{2}\right]^2$$
$$=>(x_1+x_3)(x_2+x_4)\leq 4$$
$$=>\sqrt[m]{x_1}\cdot\sqrt[n]{x_2}+...+\sqrt[m]{x_4}\cdot\sqrt[n]{x_1}\leq$$
$$\leq\frac{4(m-1)(n-1)+4(m+n-2)+4}{m\cdot n}\leq$$

$$\leq \frac{4(m\cdot n - m - n + 1 + m + n - 2 + 1)}{m\cdot n} \leq \frac{4\cdot m\cdot n}{m\cdot n} \leq 4$$

$\Rightarrow \sqrt[m]{x_1}\cdot\sqrt[n]{x_2} + \sqrt[m]{x_2}\cdot\sqrt[n]{x_3} + \sqrt[m]{x_3}\cdot\sqrt[n]{x_4} + \sqrt[m]{x_4}\cdot\sqrt[n]{x_1} \leq 4$

b) Avem egalitate $\Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1\ (m_g = m_a)$

4. Să se determine toate funcțiile $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ care îndeplinesc condiția:

$$x+\sqrt{x}-f(x)=\sqrt{f(f(x))},\ \ \forall x\in\mathbb{N}.$$

Gabriel Daniilescu, Brăila

Soluție. Demonstrăm mai întâi că f este injectivă

f(x) = f(y) ⇒ f(f(x)) = f(f(y)) ⇒ x+$\sqrt{x}$ = y + $\sqrt{y}$ ⇒ x = y ⇒ f injectivă

Pentru x = 0 ⇒ −f(0) = $\sqrt{f(f(0))}$ ⇒ f(0) = 0

Pentru x = 1 ⇒ 2 − f(1) = $\sqrt{f(f(1))}$ ⇒ 2 − f(1) ≥ 0 ⇒ f(1) ≤ 2 şi cum f(1) ≠ f(0)⇒f(1)∈ $\{1,2\}$.

Dacă f(1) = 2 ⇒$\sqrt{f(f(1))}$ = 0 ⇒ f(2) = 0⇒ f(2) = f(0) ⇒ 2 = 0 , fals. Deci, f(1) = 1 care verifică ipoteza.

Vom demonstra prin inducţie că f(n) = n, ∀ n∈ℕ.

Avem f(0) = 0 şi presupunem că f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 2,..., f(n)=n.

Din injectivitate rezultă f(n+1) ≥ n+1. Dacă f(n+1) > n+1 ⇒ f(f(n+1))≥ n+1⇒

⇒ n+1 + $\sqrt{n+1}$ = f(n+1) + $\sqrt{f(f(n+1))}$ > n+1 + $\sqrt{n+1}$, fals!

Rezultă f(n+1) = n+1 şi conform metodei inducţiei matematice rezultă că f(n) = n, ∀ n∈ℕ.