Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

28 februarie 2016

Clasa a VII-a

Problema 1.

Fie numerele: a = $\dfrac{4}{3^n+3^{n+1}}, n\in\mathbb{N}^*$;

b = $\dfrac{13}{3^n+3^{n+1}+3^{n+2}}, n\in\mathbb{N}^*$;

c = $\dfrac{3^n+(-3)^n-9^n-(-9)^n}{3+3^2+3^3+...+3^n}, n\in\mathbb{N}^*$.

a) Să se compare numerele a şi b.

b) Să se demonstreze că numărul $(-6\cdot c)\cdot(a+b)$ este pătrat perfect, $(\forall)n\in\mathbb{N}^*$.

Problema 2.

Fie numerele a, b, c, d $\in\mathbb{R}_+$, astfel încât $a\cdot b\cdot c\cdot d = 1$. Să se calculeze:

$$E=\frac{7+a}{1+a+ab+abc}+\frac{7+b}{1+b+bc+bcd}+\frac{7+c}{1+c+cd+cda}+\frac{7+d}{1+d+ad+dab}$$

Problema 3.

În paralelogramul ABCD, bisectoarele unghiurilor $\measuredangle DAB$ şi $\measuredangle ABC$ se intersectează în punctul F, $F\in(CD)$, iar aria triunghiului $\triangle AFB$ este $25\ \text{cm}^2$. Să se calculeze:

a) aria triunghiului $\triangle ADF$ şi aria paralelogramului ABCD.

b) dacă $AF\cap BD=\{P\}$ şi $BF\cap AC=\{Q\}$, să se demonstreze că $PQ \parallel DC$.

Problema 4.

Fie patrulaterul convex ABCD, $m(\measuredangle A)\neq m(\measuredangle B)$, $AD\cap BC=\{T\}$ şi punctele $M\in(BC)$, $N\in(AD)$, astfel încât $[AN]\equiv[MB]$. Să se demonstreze că dreapta determinată de mijloacele segmentelor $[MN]$ şi $[AB]$ este paralelă cu bisectoarea unghiului $\measuredangle ATB$.

Notă: Toate problemele sunt obligatorii
Timp efectiv de lucru 3 ore
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

28 februarie-2016

Clasa a VII-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	**Soluţie, rezolvare**	**Punctaj**
1.	a) a=$\frac{4}{3^n+3^{n+1}}=\frac{4}{3^n+3^n\cdot 3}=\frac{4}{3^n\cdot(1+3)}=\frac{4}{3^n\cdot 4}=\frac{1}{3^n}$;	1p
	b=$\frac{13}{3^n+3^{n+1}+3^{n+2}}=\frac{13}{3^n\cdot\left(1+3+3^2\right)}=\frac{13}{3^n\cdot 13}=\frac{1}{3^n}$;	1p
	$a=b$;	1p
	b)Calculăm S=$3+3^2+3^3+\ldots+3^n\ /\cdot 3\Rightarrow 3\cdot$S=$3^2+3^3+\ldots+3^n+3^{n+1}$;	
	$\left.\begin{array}{l}S=3+3^2+3^3+\ldots+3^n\\ 3\cdot S=3^2+3^3+\ldots+3^n+3^{n+1}\end{array}\right\}\uparrow\overset{-}{\Longrightarrow}2\cdot S=3^{n+1}-3\Rightarrow S=\frac{3\cdot\left(3^n-1\right)}{2}$;	1p
	$3^n+(-3)^n-9^n-(-9)^n=3^n\cdot\left(1+(-1)^n\right)-9^n\cdot\left(1+(-1)^n\right)=-3^n\cdot\left(1+(-1)^n\right)\cdot\left(3^n-1\right)$	1p
	c $=\frac{-3^n\cdot\left(1+(-1)^n\right)\cdot\left(3^n-1\right)}{3\cdot\frac{3^n-1}{2}}=-3^n\cdot\left(1+(-1)^n\right)\cdot\left(3^n-1\right)\cdot\frac{2}{3\cdot\left(3^n-1\right)}=-2\cdot 3^{n-1}\cdot\left(1+(-1)^n\right)=$ $=\begin{cases}0, n=2k+1,\ k\in\mathbb{N}\\ -2^2\cdot 3^{n-1}, n=2k,\ k\in\mathbb{N}^*\end{cases}$	1p
	1.$n=2k,\ k\in\mathbb{N}^*\Rightarrow\ (\text{-}6\cdot c)\cdot(a+b)=(\text{-}6)\cdot\left(-2^2\right)\cdot 3^{n-1}\cdot\frac{2}{3^n}=2^4=16=p.p.$;	
	2. n=2k+1, k$\in\mathbb{N}\Rightarrow\ (\text{-}6\cdot c)\cdot(a+b)=0=p.p.$	1p
2.	E=$\frac{7+a}{1+a+ab+abc}+\frac{7+b}{1+b+bc+bcd}+\frac{7+c}{1+c+cd+cda}+\frac{7+d}{1+d+ad+dab}$	
	$^{b\cdot c\cdot d)}\frac{7+a}{1+a+ab+abc}=\frac{7bcd+1}{bcd+abcd+ab^2cd+ab^2c^2d}=\frac{7bcd+1}{bcd+1+b+bc}$;	**2p**
	$^{b)}\frac{7+c}{1+c+cd+cda}=\frac{7b+cb}{b+bc+bcd+1}$;	**2p**
	$^{b\cdot c)}\frac{7+d}{1+d+ad+dab}=\frac{7bc+bcd}{bc+bcd+abcd+ab^2cd}=\frac{7bc+bcd}{bc+bcd+1+b}$	**2p**
	$\frac{7bcd+1}{bcd+1+b+bc}+\frac{7+b}{1+b+bc+bcd}+\frac{7b+cb}{b+bc+bcd+1}+\frac{7bc+bcd}{bc+bcd+1+b}=\frac{8+8\cdot b+8\cdot bc+8bcd}{1+b+bc+bcd}=8$	**1p**

3.	a) $[AF$-bisectoarea $\measuredangle DAB$, $F \in (DC) \Rightarrow \measuredangle DAF \equiv \measuredangle FAB$ (1) $\begin{cases} DC \parallel AB \\ \text{sec}\,anta\ AF \end{cases} \Rightarrow \measuredangle DFA \equiv \measuredangle FAB (\measuredangle -uri\ alt.\ \text{int.})$ (2) Din 1 şi 2 $\Rightarrow \measuredangle DAF \equiv \measuredangle DFA \Rightarrow \triangle ADF - \triangle$isoscel $\Rightarrow [AD] \equiv [DF]$; $[BF$-bisectoarea $\measuredangle CBA$, $F \in (DC) \Rightarrow \measuredangle CBF \equiv \measuredangle FBA$ (3) $\begin{cases} DC \parallel AB \\ \text{sec}\,anta\ BF \end{cases} \Rightarrow \measuredangle CFB \equiv \measuredangle FBA$ (4) Din 3 şi 4 $\Rightarrow \measuredangle CBF \equiv \measuredangle CFB \Rightarrow \triangle CBF - \triangle$isoscel $\Rightarrow [BC] \equiv [CF]$; $ABCD$ paralelogram $\Rightarrow [AD] \equiv [BC]$; $\begin{cases} [AD] \equiv [DF] \\ [BC] \equiv [CF] \\ [AD] \equiv [BC] \end{cases} \Rightarrow [DF] \equiv [CF] \Rightarrow AD = \frac{1}{2} \cdot CD$; Fie $E \in (AB)$, $EA = EB = \frac{1}{2} \cdot AB = AD$; $\begin{cases} AE = AD = DF \\ AE \parallel DF \end{cases} \Rightarrow AEFD - romb$ $\begin{cases} FC = BC = EB \\ BE \parallel CF \end{cases} \Rightarrow BEFC - romb$ În triunghiul $\triangle AFB$, $[FE]$ mediană $\Rightarrow A_{\triangle FEB} = A_{\triangle AFE} = \frac{1}{2} \cdot A_{\triangle AFB} = \frac{25}{2} cm^2$; $AEFD - romb \Rightarrow \triangle AEF \equiv \triangle ADF \Rightarrow A_{\triangle AEF} = A_{\triangle ADF} = \frac{25}{2} cm^2 \Rightarrow A_{\square AEFD} = 25 cm^2 \Rightarrow A_{\square ABCD} = 50 cm^2$.	**1p** **1p** **1p** **1p**
	b) $ABCD$ paralelogram, fie $AC \cap BD = \{O\}$, $AO = OC$, $BO = OD$; În triunghiul $\triangle ADC$: $[AF]$ mediană, $[DO]$ mediană, $AF \cap DO = \{P\} \Rightarrow P$ este centrul de greutate al $\triangle ADC \Rightarrow$ $\frac{AP}{PF} = \frac{2}{1}$;(1) În triunghiul $\triangle BDC$: $[BF]$ mediană, $[CO]$ mediană, $BF \cap CO = \{Q\} \Rightarrow Q$ este centrul de greutate al $\triangle BDC \Rightarrow$ $\frac{BQ}{QN} = \frac{2}{1}$;(2) Din 1 şi 2 $\Rightarrow \frac{AP}{PN} = \frac{BQ}{QN} \overset{R.T.Th}{\Rightarrow} PQ \parallel AB \parallel DC$.	**1p** **1p** **1p**

4.	Fie $P \in (AB), [AP] \equiv [PB]$; Fie $Q \in (MN)$, $[MQ] \equiv [QN]$; Fie $AE \parallel NQ$ şi $[AE] \equiv [NQ] \Rightarrow AEQN$ este paralelogram $\Rightarrow [EQ] \equiv [AN] (1)$ Fie $BF \parallel MQ$ şi $[BF] \equiv [MQ] \Rightarrow BMQF$ este paralelogram $\Rightarrow [BM] \equiv [FQ] (2)$ Dar $[BM] \equiv [AN] (3)$ Din 1, 2 şi 3 $\Rightarrow [FQ] \equiv [EQ] \Rightarrow \triangle QEF$ este isoscel; $\begin{cases} [AE] \equiv [NQ] \\ AE \parallel NQ \\ BF \parallel MQ \\ [BF] \equiv [MQ] \\ [MQ] \equiv [NQ] \end{cases} \Rightarrow AEBF$ este paralelogram, unde $AB \cap EF = \{P\}, [EP] \equiv [PF]$ $\begin{cases} \triangle QEF \text{ este isoscel} \\ [EP] \equiv [PF] \end{cases} \Rightarrow [QP$ este bisectoarea $\measuredangle EQF$; $\begin{cases} EQ \parallel AN \\ FQ \parallel BM \\ EQ \cap BT = \{U\} \\ FQ \cap AT = \{V\} \end{cases} \Rightarrow TUQV$ este paralelogram $\Rightarrow \measuredangle EQF \equiv \measuredangle VQU \equiv \measuredangle ATB \Rightarrow$ QP este paralelă cu bisectoarea $\measuredangle ATB$.	**1p** **1p** **1p** **1p** **1p** **2p**