Inspectoratul Şcolar al Judeţului Buzău

Societatea de Ştiinţe Matematice Filiala Buzău

Olimpiada de matematică
faza locală
21 februarie 2016

Clasa a IX-a

1. a) Daţi un exemplu de numere iraţionale a, b, astfel încât numerele $a+b$ şi ab să fie numere raţionale nenule.
   b) Fie a, b numere reale. Arătaţi că există un număr iraţional c astfel încât numerele $a+c$ şi $b+c$ să fie iraţionale.

2. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, notăm cu S_n suma primilor n termeni. Fie p, q numere naturale nenule, diferite. Ştiind că $S_p = q$ şi $S_q = p$, calculaţi S_{p+q}.

3. Vectorii $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{v_3}, \overline{v_4}$ au lungimile egale şi suma zero. Arătaţi că sunt doi câte doi vectori opuşi.

4. O dreaptă care trece prin centrul de greutate al triunghiului ABC intersectează laturile AB şi AC în punctele M şi N. Arătaţi că
$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{AN}{NC} \geq 4.$$

Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.

Olimpiada de matematică faza locală
21 februarie 2016
Soluţii şi bareme
Clasa a IX-a

1. a) Daţi un exemplu de numere iraţionale a, b, astfel încât numerele $a+b$ şi ab să fie numere raţionale nenule.
   b) Fie a, b numere reale. Arătaţi că există un număr iraţional c astfel încât numerele $a+c$ şi $b+c$ să fie iraţionale.
   Soluţie. a) Exemplu corect 4p
   b) Presupunând contrariul, pentru orice x iraţional, unul dintre numerele $a+x$, $b+x$ este raţional. Alegem x iraţional şi apoi perechile $(a+x, b+x)$, $(a+2x, b+2x)$, $(a+3x, b+3x)$. Cel puţin 2 perechi vor avea o aceeaşi componentă număr raţional. Prin scădere, deducem $x \in \mathbb{Q}$ sau $2x \in \mathbb{Q}$, absurd 3p

2. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, notăm cu S_n suma primilor n termeni. Fie p, q numere naturale nenule, diferite. Ştiind că $S_p = q$ şi $S_q = p$, calculaţi S_{p+q}.
   Soluţie. Un calcul direct arată că $S_p - S_q = (p-q)\,\frac{a_1+a_{p+q}}{2}$ 3p
   Deducem că $\frac{a_1+a_{p+q}}{2} = -1$ 1p
   şi apoi că $S_{p+q} = \frac{1}{2}(p+q)(a_1+a_{p+q}) = -(p+q)$ 3p

3. Vectorii $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{v_3}, \overline{v_4}$ au lungimile egale şi suma zero. Arătaţi că sunt doi câte doi vectori opuşi.
   Soluţie. Deoarece suma vectorilor este nulă, ei reprezintă laturile unui patrulater 3p
   Deoarece au lungimi egale, patrulaterul este romb, laturile opuse fiind egale şi paralele, de unde concluzia 4p

4. O dreaptă care trece prin centrul de greutate al triunghiului ABC intersectează laturile AB şi AC în punctele M şi N. Arătaţi că
   $$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{AN}{NC} \geq 4.$$
   Soluţie. Dacă $MN || BC$, atunci $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = 2$ şi inegalitatea devine egalitate 2p
   Dacă nu, fie P intersecţia dintre MN şi BC şi D mijlocul lui BC. Aplicând Menelaus în ABD şi ACD obţinem, prin însumare, $\frac{MB}{AM} + \frac{NC}{AN} = 1$ 3p
   Inegalitatea cerută rezultă acum din inegalitatea mediilor 2p