Inspectoratul Şcolar al Judeţului Buzău

Societatea de Ştiinţe Matematice Filiala Buzău

Olimpiada de matematică
faza locală
21 februarie 2016
Clasa a X-a

1. Fie a, b, c numere pozitive, diferite de 1. Notăm
$$x = \log_a bc, \quad y = \log_b ac, \quad z = \log_c ab.$$
Arătaţi că
$$x + y + z + 2 = xyz.$$

2. Să se rezolve ecuaţia
$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} + \sqrt{x+4} = \sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}}.$$

3. Să se arate că nu există funcţii injective $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, astfel încât
$$f\left(3^x\right) + f\left(5^x\right) = 8,$$
pentru orice x real.

4. Fie u, v, w numere complexe astfel ca
$$u + v + w = u^2 + v^2 + w^2 = 0.$$
Arătaţi că $|u| = |v| = |w|$.

Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.

Olimpiada de matematică
faza locală
21 februarie 2016

Soluţii şi bareme
Clasa a X-a

1. Fie a, b, c numere pozitive, diferite de 1. Notăm

$$x = \log_a bc, \quad y = \log_b ac, \quad z = \log_c ab.$$

Arătaţi că

$$x + y + z + 2 = xyz.$$

Soluţie. Avem $x + 1 = \log_a abc$, de unde $\log_{abc} a = \frac{1}{x+1}$ şi analoagele 3p
Deducem $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} = 1$ 2p
Concluzia 2p

2. Să se rezolve ecuaţia

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} + \sqrt{x+4} = \sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}}.$$

Soluţie. Observăm că $10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60} = \left(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}\right)^2$ 2p
deci ecuaţia se scrie $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} + \sqrt{x+4} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ 1p
Se observă soluţia $x = 1$ 1p
Soluţia e unică deoarece membrul stâng e funcţie strict crescătoare 3p

3. Să se arate că nu există funcţii injective $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, astfel încât

$$f(3^x) + f(5^x) = 8,$$

pentru orice x real.
Soluţie. Presupunând că există f injectivă, pentru $x = 1$ obţinem $f(3) + f(5) = 8$. Pentru $x = \log_3 5$, obţinem $f(5) + f\left(5^{\log_3 5}\right) = 8$ 3p
Deducem $f(3) = f\left(5^{\log_3 5}\right)$ şi, din injectivitate, $3 = 5^{\log_3 5}$ 2p
Logaritmând egalitatea în baza 3, obţinem o contradicţie 2p

4. Fie u, v, w numere complexe astfel ca

$$u + v + w = u^2 + v^2 + w^2 = 0.$$

Arătaţi că $|u| = |v| = |w|$.
Soluţie. Avem $w = -u - v$ şi apoi $u^2 + v^2 + (-u - v)^2 = 0$, de unde $u^2 + v^2 + uv = 0$ 3p
Înmulţind cu $u - v$, deducem $u^3 - v^3 = 0$, de unde $u^3 = v^3$, deci $|u| = |v|$ 3p
Analog $|u| = |w|$ 1p