

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA
21 februarie 2016

CLASA a XII-a

1. Se consideră mulțimea $G = \{x \in \mathbb{Q}^* / x = a^2 + b^2, a, b \in \mathbb{Q}\}$. Arătați că operația de înmulțire a numerelor raționale determină pe G o structură de grup abelian.
2. Demonstrați că orice element inversabil din inelul $(\mathbb{Z}_{2016}, +, \cdot)$ este puterea a 2017-a a unui element inversabil din \mathbb{Z}_{2016} .
3. Calculați $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \operatorname{tg} x) dx$.
4. Fie $a > 0$ și $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă cu proprietatea că $f(0) = f(a) = 1$. Fie $I = \int_0^a f(x) dx$.
Dacă $|f'(x)| \leq 1, \forall x \in (0, a)$ să se demonstreze că $|I - a| \leq \frac{a^2}{2}$.

- Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.**
2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.
3. Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

SUCEAVA, 21 februarie 2016

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

CLASA a XII-a

1. Se consideră mulțimea $G = \{x \in \mathbb{Q}^* / x = a^2 + b^2, a, b \in \mathbb{Q}\}$. Arătați că operația de înmulțire a numerelor raționale determină pe G o structură de grup abelian.

Soluție. Oricare ar fi elementele $x, y \in G$ avem $x, y \in \mathbb{Q}^*$ și $x = a^2 + b^2, y = c^2 + d^2$ cu $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$.

Evident $xy \in \mathbb{Q}^*$ și $xy = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$, adică $xy \in G$.

Înmulțirea numerelor raționale este asociativă și comutativă, iar $G \subset \mathbb{Q}$, prin urmare operația “ \cdot ” este asociativă și comutativă pe G .

$1 = 1^2 + 0^2 \Rightarrow 1 \in G$, deci 1 este element neutru în (G, \cdot) .

Fie $x = a^2 + b^2 \in G$. Căutăm un element $y = c^2 + d^2 \in G$ astfel încât $xy = 1$. Rezolvând, de exemplu, sistemul $\begin{cases} ac + bd = 1 \\ ad - bc = 0 \end{cases}$ obținem $c = \frac{a}{a^2 + b^2} \in \mathbb{Q}, d = \frac{b}{a^2 + b^2} \in \mathbb{Q}$ și $c^2 + d^2 = \frac{1}{a^2 + b^2} \neq 0$.

Rezultă că orice element $x = a^2 + b^2 \in G$ este inversabil cu $x^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(\frac{b}{a^2 + b^2}\right)^2 \in G$.

În concluzie (G, \cdot) este grup abelian.

Barem.

$\forall x, y \in G \Rightarrow xy \in G$	2 p
Operația “ \cdot ” este asociativă și comutativă pe G	1 p
1 este element neutru în (G, \cdot)	1 p
Orice element $x = a^2 + b^2 \in G$ este inversabil	2 p
Finalizare	1 p

2. Demonstrați că orice element inversabil din inelul $(\mathbb{Z}_{2016}, +, \cdot)$ este puterea a 2017-a a unui element inversabil din \mathbb{Z}_{2016} .

Mihai Piticari, Vladimir Cerbu

Soluție. Avem de demonstrat că $\forall y \in U(\mathbb{Z}_{2016}) \exists x \in U(\mathbb{Z}_{2016})$ astfel încât $y = x^{2017}$, adică funcția $f : U(\mathbb{Z}_{2016}) \rightarrow U(\mathbb{Z}_{2016}), f(x) = x^{2017}$ este surjectivă.

Deoarece $U(\mathbb{Z}_{2016})$ este mulțime finită, este suficient să demonstrăm că f este injectivă.

Fie $x, y \in U(\mathbb{Z}_{2016})$ cu $f(x) = f(y)$. Avem $x^{2017} = y^{2017} \Rightarrow (xy^{-1})^{2017} = 1 \Rightarrow \text{ord}(xy^{-1}) / 2017 \quad (1)$.

Dar ordinul unui element divide ordinul grupului, deci $\text{ord}(xy^{-1}) / \text{ord}(U(\mathbb{Z}_{2016})) = \varphi(2016)$. Cum

$$2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 \Rightarrow \varphi(2016) = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{7}\right) = 2^6 \cdot 3^2, \text{ deci } \text{ord}(xy^{-1}) / 2^6 \cdot 3^2 \quad (2).$$

Deoarece 2017 și $2^6 \cdot 3^2$ sunt prime între ele, din relațiile (1) și (2) deducem că $\text{ord}(xy^{-1}) = 1$, iar de aici rezultă că $xy^{-1} = 1$, adică $x = y$. În concluzie f este injectivă.

Barem.

Scrie cerința sub forma “ funcția $f : U(\mathbb{Z}_{2016}) \rightarrow U(\mathbb{Z}_{2016}), f(x) = x^{2017}$ este surjectivă ”	2 p
$U(\mathbb{Z}_{2016})$ este mulțime finită, deci f surjectivă $\Leftrightarrow f$ injectivă	1 p
Stabilește relația (1)	1 p
Stabilește relația (2)	2 p
Finalizare	1 p

3. Calculați $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \text{tg } x) dx$.

Soluție. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \text{tg } x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1 + \frac{\sin x}{\cos x}\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin x + \cos x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x) dx \quad (1)$

Avem $\sin x + \cos x = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \Rightarrow$

$\ln(\sin x + \cos x) = \ln \sqrt{2} + \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right)$ și atunci

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \text{tg } x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sqrt{2} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right) dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x) dx \quad (2)$$

Cu schimbarea de variabilă $t = \frac{\pi}{4} - x$ obținem

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right) dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \ln(\cos t) \cdot (-1) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x) dx \text{ și înlocuind în relația (2)}$$

rezultă $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \text{tg } x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sqrt{2} dx = x \ln \sqrt{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi \ln 2}{8}$.

Barem.

Stabilește relația (1)	1 p
Obține $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$	2 p
Stabilește relația (2)	1 p
$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x) dx$	2 p
Finalizare	1 p

4. Fie $a > 0$ și $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă cu proprietatea că $f(0) = f(a) = 1$. Fie $I = \int_0^a f(x) dx$.

Dacă $|f'(x)| \leq 1, \forall x \in (0, a)$ să se demonstreze că $|I - a| \leq \frac{a^2}{2}$.

Anca Andrei

Soluție.

Considerăm $x \in (0, a)$ și aplicăm teorema lui Lagrange funcției f pe intervalele $[0, x], [x, a]$.
Deci $\exists c_1 \in (0, x), \exists c_2 \in (x, a)$ astfel încât $f(x) = 1 + xf'(c_1)$ și $f(x) = 1 + (x-a)f'(c_2)$. Rezultă că avem relațiile:

$$(1) \quad 1 - x \leq f(x) \leq 1 + x, \quad \forall x \in (0, a)$$

$$(2) \quad 1 + x - a \leq f(x) \leq 1 - x + a, \quad \forall x \in (0, a)$$

Deoarece f este continuă rezultă că inegalitățile (1) și (2) au loc pentru $\forall x \in [0, a]$.

Din $\int_0^a f(t) dt = \int_0^x f(t) dt + \int_x^a f(t) dt$ și din relațiile (1), (2) avem că

$$\int_0^x (1-t) dt + \int_x^a (1+t-a) dt \leq \int_0^a f(t) dt \leq \int_0^x (1+t) dt + \int_x^a (1-t+a) dt, \text{ iar de aici obținem}$$

$$x - \frac{x^2}{2} + a - x - a(a-x) + \frac{a^2}{2} - \frac{x^2}{2} \leq I \leq x + \frac{x^2}{2} + a - x + a(a-x) - \frac{a^2}{2} + \frac{x^2}{2} \Rightarrow$$

$$-x^2 + a + ax - \frac{a^2}{2} \leq I \leq x^2 + a - ax + \frac{a^2}{2} \Rightarrow -x^2 + ax - \frac{a^2}{2} \leq I - a \leq x^2 - ax + \frac{a^2}{2}.$$

Deoarece $x^2 - ax + \frac{a^2}{2} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ și $\forall a \in \mathbb{R}$ va rezulta că $|I - a| \leq x^2 - ax + \frac{a^2}{2}$.

Dar $x(x-a) \leq 0, \forall x \in [0, a]$ și prin urmare $|I - a| \leq \frac{a^2}{2}$.

Barem.

Obține inegalitățile (1) și (2) $\forall x \in [0, a]$	2 p
$\int_0^x (1-t) dt + \int_x^a (1+t-a) dt \leq \int_0^a f(t) dt \leq \int_0^x (1+t) dt + \int_x^a (1-t+a) dt$	1 p
Demonstrează $-x^2 + ax - \frac{a^2}{2} \leq I - a \leq x^2 - ax + \frac{a^2}{2}$	3 p
Finalizare	1 p

Notă:

Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.