OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALA – 21 FEBRUARIE 2016

Clasa a IX-a

Problema 1. Se consideră șirurile de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ și $(y_n)_{n\geq 1}$. Dacă $3(x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n)=nx_{n+1}$ și $x_n=ny_n$, $(\forall)n\in\mathbb{N}^*$, atunci demonstrați că $(y_n)_{n\geq 1}$ este un șir progresie aritmetică.

Soluție: $3(x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n)=nx_{n+1}\Rightarrow x_n=\dfrac{n(n+1)}{2}x_1$ (4p) (*se demonstrează direct sau pin inducție*); $y_n=\dfrac{n+1}{2}x_1$ (1p); $y_{n-1}-y_n=\dfrac{1}{2}x_1$, $(\forall)n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow (y_n)_{n\geq 1}$ este un șir progresie aritmetică (2p).

Problema 2. Dacă notăm cu $[x]$ partea întreagă a numărului real x, atunci demonstrați că:

a) $\left[\sqrt{4n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+2}\right]$, $(\forall)n\in\mathbb{N}$;

b) $\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+1}\right]$, $(\forall)n\in\mathbb{N}$.

Soluție: a) $(\forall)n\in\mathbb{N}\Rightarrow$ numărul $4n+2$ nu este pătrat perfect (1p)$\Rightarrow\exists k\in\mathbb{N}$ astfel încât $k^2\leq 4n+1<4n+2<(k+1)^2\Rightarrow\left[\sqrt{4n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+2}\right]$, $(\forall)n\in\mathbb{N}$; (2p) b) $\sqrt{4n+1}\leq\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\leq\sqrt{4n+2}$ (2p)$\Rightarrow\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+1}\right]$, $(\forall)n\in\mathbb{N}$. (2p)

Problema 3. Dacă $a, b, c, d\in[0,+\infty)$ și $a+b+c+d=4$, atunci demonstrați că $a\sqrt{b}+b\sqrt{c}+c\sqrt{d}+d\sqrt{a}\leq 4$.

Soluție: $\sqrt{x}\leq\dfrac{x+1}{2}$, $\forall x\in[0,+\infty)$ (1p); $a\sqrt{b}+b\sqrt{c}+c\sqrt{d}+d\sqrt{a}\leq\dfrac{a+ab+b+bc+c+cd+d+da}{2}=$ $=2+\dfrac{(a+c)(b+d)}{2}$ (3p); Lemă: Dacă $x, y\in\mathbb{R}$ și $x+y=4$, atunci $xy\leq 4$. Dem. Presupunem că $xy>4\Rightarrow$ $xy>4\Rightarrow -4xy<-16$ $(*)$; $x+y=4\Rightarrow(x+y)^2=16$ $(**)$; din $(*)$ și $(**)\Rightarrow(x-y)^2<0$, fals (2p); finalizare (1p)

Problema 4. Se consideră triunghiul ΔABC și punctele $M\in(BC)$, $N\in(CA)$, $P\in(AB)$. Dacă $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}$, atunci arătați că:

a) triunghiurile ΔABC și ΔMNP au același centru de greutate;

b) $(\exists)\alpha\in(0,1)$ astfel încât $\overrightarrow{BM}=\alpha\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CN}=\alpha\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AP}=\alpha\overrightarrow{AB}$.

Cristina Bornea, Călărași

Soluție: a) Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ΔABC și G' este centrul de greutate al triunghiului ΔMNP, atunci $\vec{0}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'M}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'N}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'P}=3\overrightarrow{GG'}\Rightarrow G=G'$ (3p)

b) $M\in(BC),\ N\in(CA),\ P\in(AB)\Rightarrow\exists\in a,\ b,\ c\in(0,1)$ astfel încât $\overrightarrow{BM}=a\overrightarrow{BC},\quad \overrightarrow{AP}=c\overrightarrow{AB}$ (1p);
$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AP}=\vec{0}\Rightarrow a\overrightarrow{BC}+b\overrightarrow{CA}+c\overrightarrow{AB}=\vec{0}\Rightarrow(b-a)\overrightarrow{CA}+(c-a)\overrightarrow{AB}=\vec{0}$
(3p); din ultima relație rezultă $a=b=c,$ pentru că vectorii $\overrightarrow{CA}$ și $\overrightarrow{AB}$ nu sunt coliniari (1p);

SUCCES!

Str. Sloboziei, nr. 28, 910001
Mun. Călărași, Jud. Călărași
Tel: +40 0242 315 949
Fax: +40 0242 312 810
www.isj.cl.edu.ro

Baremul de notare este : Problema 1. 7 puncte; **Problema 2.** a) 3 puncte; b) 4 puncte; **Problema 3.** 7 puncte; **Problema 4. a**) 3 puncte; b) 4 puncte.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALA – 21 FEBRUARIE 2016

Clasa a X-a

Problema 1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $a^x-x^a=1,$ unde $a\in(0,1)$, a fixat;

b) $7^{2x}+30^x=3^{2x}+70^x$;

c) $2^{5x}+3^{2x}+7^x=3\cdot 2016^{\frac{x}{3}}$.

Florin Marcu, Călărași

Soluție: a) $x=0$; b) $7^{2x}+30^x=3^{2x}+70^x\Leftrightarrow(7^x-3^x)(7^x+3^x-10^x)=0\Leftrightarrow x=0$ sau $x=1$; c) $\dfrac{a+b+c}{3}=\sqrt[3]{abc}\Leftrightarrow$
$a=b=c\Rightarrow x=0$ soluție unică

Problema 2. Se consideră propozițiile P_1: „$(\exists)x,\ y\in(0,+\infty)$ asfel încât $5\left[(x+y)^2+\log_2^2 y\right]=\left[x+\log_2\left(2^y\cdot y^2\right)\right]^2$" și
P_2: „$(\exists)x\in\mathbb{R}$ și $y\in(0,+\infty)$ astfel încât $4^y=4y(3x+4)$".

a) Să se demonstreze că P_1 este falsă.

b) Să se demonstreze că P_2 este adevărată.

Gabriel Daniilescu, Brăila

Soluție: a) presupunem că $(\exists)x,\ y\in(0,+\infty)$ pentru care P_1 este adevărată;
$P_1\Leftrightarrow[2(x+y)-\log_2 y]^2=0\Leftrightarrow 2(x+y)=\log_2 y$; (2p) $2^n\geq n+1,\ (\forall)n\in\mathbb{N}$ (1p)(*se demonstrează prin inducție*);
$y\in(0,+\infty)\Rightarrow[y]=n\in\mathbb{N},\ 2^y\geq 2^n\geq n+1>y\Rightarrow y>\log_2 y\Rightarrow y>2(x+y)$ contradicție (2p)

b) $2(x+y)=\log_2 y\Leftrightarrow\dfrac{4^y}{y}=\dfrac{1}{4^x}\Rightarrow P_2\Leftrightarrow 4^{-x}=4(3x+4)$ adevărat pentru $x=-1$; (1p)pentru $x=-1\Rightarrow P_2\Leftrightarrow$
$4^y=4y$, adevărat pentru $y=1$.(1p)

Problema 3. Se consideră $z_1,\ z_2,\ z_3 \in \mathbb{C}^*$. Să se arate că:

a) dacă $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1,\ z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$ şi $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0,$ atunci $|z_1 + z_2 + z_3| = 2;$

b) dacă $z_1,\ z_2,\ z_3$ sunt distincte două câte două și $(z_1 + z_2)^3 = (z_2 + z_3)^3 = (z_3 + z_1)^3$, atunci $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$.

Soluție: a) $(a+b+c)^2 = 2(ab+bc+ca)$ (1p); $|a+b+c| = |\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}|$ (1p) $|\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}| = |ab+bc+ca|$ și finalizare (1p)

b) $(z_1+z_2)^3=(z_2+z_3)^3=(z_1+z_3)^3$ => $(\exists)$ w $\in \mathbb{C}$ a.î. $z_1+z_2=$ w, $z_2+z_3=$ w$\cdot\varepsilon$, $z_3+z_1=$ w$\cdot\varepsilon$ (1p) => P(z_1+z_2), Q(z_2+z_3), R(z_1+z_3) sunt vârfurile unui triunghi echilateral (1p) => D($\frac{z_1+z_2}{2}$), E($\frac{z_2+z_3}{2}$), F($\frac{z_3+z_1}{2}$) sunt vârfurile unui triunghi echilateral (1p) => Δ ABC echilateral ($A_{(z1)}$,$B_{(z2)}$,$C_{(z3)}$) => $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$ (1p)

Problema 4. Se consideră funcția $f:\mathbb{N} \to [0,1),\ f(n) = \left\{2^{n+\frac{1}{2}}\right\},$ unde $\{x\}$ este partea fracționară a numărului real x, demonstrați că:

a) funcția f este injectivă;

b) funcția f nu este surjectivă.

Soluție: a) $f(n) = f(m) \Leftrightarrow (2^n - 2^m)\sqrt{2} = \left[2^n\sqrt{2}\right] - \left[2^m\sqrt{2}\right]$; dacă presupunem $n \neq m \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, fals, deci $f(n) = f(m) \Leftrightarrow n = m \Rightarrow f$ funcție injectivă b) fie $p \in [0,1) \cap \mathbb{Q}$, presupunem că $(\exists) n \in \mathbb{N}$ astfel încât $f(n) = p \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{\left[2^n\sqrt{2}\right]}{2^n} \in \mathbb{Q}$ fals, deci $f(n) \neq p,\ (\forall) n \in \mathbb{N} \Rightarrow f$ nu este o funcție surjectivă

SUCCES!

Baremul de notare este : Problema 1. a) 2 puncte; b) 2 puncte; c)3 puncte; **Problema 2.** a) 5 puncte; b) 2 puncte; **Problema 3.** a) 3 puncte; b) 4 puncte; **Problema 4. a**) 3 puncte; b) 4 puncte.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALA – 21 FEBRUARIE 2016

Clasa a XI-a

Problema 1. Să se arate că oricare două matrice $A,\ B \in M_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 2014 & 2015 \\ 2016 & 2017 \end{pmatrix}$ nu comută între ele.

Soluție: presupunem că $AB = BA \Rightarrow \det\left(A^2+B^2\right) = \left[\det\left(A+iB\right)\right]\cdot\left[\det\left(A-iB\right)\right] = \left|\det\left(A+iB\right)\right|^2 \geq 0;$

notăm $2014 = a \Rightarrow \det\left(A^2+B^2\right) = \begin{vmatrix} a & a+1 \\ a+2 & a+3 \end{vmatrix} = -2 < 0$, contradicție.

Problema 2. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Arătați că $X^3 \neq A,\ (\forall) X \in M_3(\mathbb{C})$.

Soluție: presupunem că $(\exists) X \in M_3(\mathbb{C})$ astfel încât $X^3 = A \Rightarrow X^4 = AX = XA \Rightarrow (\exists) a,\ b,\ c \in \mathbb{C}$ astfel încât

$X = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix} (3p) \Rightarrow X^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 \\ 3a^2b & a^3 & 0 \\ 3ab^2+3a^2c & 3a^2b & a^3 \end{pmatrix}$ (2p); $X^3 = A \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 = 0 \\ 3a^2b = 1 \\ 3ab^2+3a^2c = 2 \end{cases}$, fals. (2p)

Problema 3. Fie șirurile $(x_n)_{n\geq 1}$ și $(y_n)_{n\geq 1}$, definite prin $x_n = \frac{1}{2^{1^2}} + \frac{1}{2^{2^2}} + \frac{1}{2^{3^2}} + \ldots + \frac{1}{2^{n^2}}$ și $y_n = x_n + \frac{1}{2n\cdot 2^{n^2}}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$. Arată că:

a) șirul $(y_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător;

b) șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent;

c) limita șirului $(x_n)_{n\geq 1}$ este un număr irațional.

Soluție: a) $y_{n+1} < y_n \Leftrightarrow 2^{n+1} > \frac{2n^2+3n}{n+1}$, adevărat $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$. (*se justifică, de exemplu, prin inducție*); b) șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător și mărginit superior; c) presupunem că limita șirului $(x_n)_{n\geq 1}$ este numărul rațional $\frac{a}{b}$, unde a și $b \in \mathbb{N}^*$; $x_n < \frac{a}{b} < y_n,\ (\forall) n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 < a\cdot 2^{b^2} - b\left(2^{b^2-1^2} + 2^{b^2-2^2} + \ldots + 2^{b^2-b^2}\right) < \frac{1}{2}$, fals.

Problema 4. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ șirul cu termenul general $x_n = \sqrt{n+\sqrt{n-1+\sqrt{n-2+\ldots+\sqrt{1}}}}$, $n \in \mathbf{N}^*$. Să se arate că:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}} = 1$;.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(x_n - \sqrt{n}\right) = \frac{1}{2}$.

Soluție: a) $x_n = \sqrt{n + x_{n-1}},\ n \in N^*$, $x_1 = 1$ (1p); $\sqrt{n} \leq x_n \leq \sqrt{2n}$, $(*)$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ (1p) (*prima inegalitate este evidentă, a doua se demonstrează prin inducție matematică*); din $(*) \Rightarrow$

$$\sqrt{n} \le x_n = \sqrt{n + x_{n-1}} \Rightarrow 1 \le \frac{x_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{1 + \frac{x_{n-1}}{n}} \le \sqrt{1 + \frac{\sqrt{2n-2}}{n}} \text{ (1p)} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}} = 1 \text{ (1p)}$$

b)

$$x_n - \sqrt{n} = \sqrt{n + x_{n-1}} - \sqrt{n} = \frac{x_{n-1}}{\sqrt{n + x_{n-1}} + \sqrt{n}} = \frac{\frac{x_{n-1}}{\sqrt{n-1}} \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1 + \frac{x_{n-1}}{\sqrt{n-1}} \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}} + 1} \text{ (2p)} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(x_n - \sqrt{n}\right) = \frac{1}{2} \text{ (1p)}$$

SUCCES!

Str. Sloboziei, nr. 28, 910001
Mun. Călărași, Jud. Călărași
Tel: +40 0242 315 949
Fax: +40 0242 312 810
www.isj.cl.edu.ro

Baremul de notare este : Problema 1. 7 puncte; **Problema 2.** 7 puncte; **Problema 3.** a) 2 puncte; b) 2 puncte; c)3 puncte; **Problema 4. a**) 3 puncte; b) 4 puncte.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALA – 21 FEBRUARIE 2016

Clasa a XII-a

Problema 1. Fie $(G,\cdot)$ un grup finit cu proprietatea că funcția $f : G \to G,\ f(x) = x^2$ este automorfism de grupuri. Arătați că mulțimea G are un număr impar de elemente.

Soluție: presupunem că $\exists x \in G \setminus \{e\}$, astfel încât $x = x^{-1}$(2p) $\Leftrightarrow x^2 = e;\ f(x) = x^2 = e,\quad f(e) =$ și f injectivă $\Rightarrow x = e$, fals (3p) $\Rightarrow x \ne x^{-1}, \forall x \in G \setminus \{e\} \Rightarrow$ mulțimea G are un număr impar de elemente (2p)

Problema 2. Fie $(G,\cdot)$ un grup care are elementul neutru e și mulțimea $Z(G) = \{x \in G \mid xy = yx,\ (\forall) x \in G\}$. Demonstrați că dacă $x^2 = e,\ (\forall) x \in G \setminus Z(G)$, atunci grupul G este comutativ.

Soluție: Dacă $x,\ y \in G$, atunci sunt posibile cazurile:

1. $x \in Z(G)$ sau $y \in Z(G) \Rightarrow xy = yx$;
2. $x \notin Z(G)$ și $y \notin Z(G) \Rightarrow x^2 = e$ și $y^2 = e$. Dacă $xy \in Z(G) \Rightarrow (xy)y = y(xy) \Leftrightarrow xy^2 = yxy \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow xy^2 = yxy \Leftrightarrow x = yxy \Leftrightarrow xy = yx.$ Dacă $xy \notin Z(G) \Rightarrow (xy)^2 = e \Leftrightarrow xyxy = e \Leftrightarrow x^2(yx)y^2 = xy \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow yx = xy.$

Problema 3. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to (0,+\infty)$. Dacă $f(0) = 2016$ și f admite o primitivă F cu proprietatea $f(x) = 2016 \cdot F(x),\ (\forall) x \in \mathbb{R}$, atunci calculați $\int_0^1 f(x) \cdot F(x)dx.$.

Soluție: $f(x)=2016\cdot F(x),\ (\forall)x\in\mathbb{R}\Rightarrow F(x)>0$ și $\left(\ln F(x)\right)'=2016,\ (\forall)x\in\mathbb{R}\Rightarrow F(x)=e^{2016x}$

$\Rightarrow\int_0^1 f(x)\cdot F(x)dx=\frac{1}{2}\left(e^{4032}-1\right)$

Florin Marcu, Călărași

Problema 4. Dacă $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ este o funcție continuă cu proprietatea că $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\mathrm{tg}^2 x)\cdot\left(1+\mathrm{tg}^2 x\right)dx=1,$ atunci să se calculeze $\int_{-1}^{1}\frac{f(x^2)}{e^x+1}dx.$

Soluția: $1=\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\mathrm{tg}^2 x)\cdot\left(1+\mathrm{tg}^2 x\right)dx\overset{\varphi(x)=\mathrm{tg}x}{=}\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\varphi^2(x))\cdot\varphi'(x)dx=\int_0^1 f(x^2)dx;$ (2p)

$\int_0^1 f(x^2)dx\overset{\varphi(x)=-x}{=}-\int_0^1 f(\varphi^2(x))\cdot\varphi'(x)dx=\int_{-1}^0 f(x^2)dx\Rightarrow\int_{-1}^1 f(x^2)dx=2;$ (2p)

$I=\int_{-1}^1\frac{f(x^2)}{e^x+1}dx\overset{\varphi(x)=-x}{=}-\int_{-1}^1\frac{f(\varphi^2(x))}{e^{-\varphi(x)}+1}\varphi'(x)dx=\int_{-1}^1\frac{e^t f(t^2)}{e^t+1}dt=\int_{-1}^1 f(t^2)dt-\int_{-1}^1\frac{f(t^2)}{e^t+1}dt=2-I\Rightarrow I=1$ (3p).

SUCCES!

Str. Sloboziei, nr. 28, 910001
Mun. Călărași, Jud. Călărași
Tel: +40 0242 315 949
Fax: +40 0242 312 810
www.isj.cl.edu.ro

Baremul de notare este : Problema 1. 7 puncte; **Problema 2.** 7 puncte; **Problema 3.** 7 puncte; **Problema 4.** a) 7 puncte.