OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 09.02.2013 –
CLASA A X-A
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiectul 1.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Avem de arătat că $0 < \sqrt[3]{1+2^x} + \sqrt[3]{1-2^x} < 2$	**2 puncte**
$\sqrt[3]{1+2^x} + \sqrt[3]{1-2^x} > 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{1+2^x} > \sqrt[3]{2^x-1} \Leftrightarrow 2^x+1 > 2^x-1$, evident	**2 puncte**
$\sqrt[3]{1+2^x} + \sqrt[3]{1-2^x} < 2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{1+2^x} - 1 < 1 + \sqrt[3]{2^x-1}$ $\Leftrightarrow \dfrac{2^x}{\sqrt[3]{(1+2^x)^2} + \sqrt[3]{1+2^x}+1} < \dfrac{2^x}{\sqrt[3]{(2^x-1)^2} - \sqrt[3]{2^x-1}+1}$ $\Leftrightarrow \sqrt[3]{(1+2^x)^2} + \sqrt[3]{1+2^x} > \sqrt[3]{(2^x-1)^2} - \sqrt[3]{2^x-1}$ – adevărat: $(2^x+1)^2 > (2^x-1)^2$ şi $2^x+1 > 1-2^x$	**3 puncte**

Subiectul 2.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Inegalitatea este echivalentă cu $\dfrac{\lg^2 x}{\lg a} + \dfrac{\lg^2 y}{\lg b} \geq \dfrac{\lg^2(xy)}{\lg(ab)}$	**2 puncte**
Aceasta se scrie $\dfrac{t^2}{\alpha} + \dfrac{u^2}{\beta} \geq \dfrac{(t+u)^2}{\alpha+\beta}$, unde $t, u, \alpha, \beta > 0$	**2 puncte**
Ea este adevărată, fiind echivalentă cu $(\beta t - \alpha u)^2 \geq 0$	**3 puncte**

Subiectul 3. Gazeta Matematică nr. 12/2012, prof. *Marian Cucoaneş*, Mărăşeşti

Detalii rezolvare	Barem asociat
Numărul $\dfrac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}}$ are modulul 1 şi argumentul $2\arg(a-b)$	**2 puncte**
Suma a trei numere complexe de modul 1 este nulă dacă şi numai dacă argumentele lor sunt de forma $\alpha, \alpha+2\pi/3, \alpha+4\pi/3$	**2 puncte**
Condiţia precedentă se realizează dacă şi numai dacă $A = B = \pi/3$ (adică triunghiul ABC este echilateral), deoarece $\arg(b-c) = \arg(a-b) + (\pi - B)$, $\arg(c-a) = \arg(a-b) + (\pi + A)$ sau $\arg(b-c) = \arg(a-b) - (\pi - B)$, $\arg(c-a) = \arg(a-b) - (\pi + A)$	**3 puncte**

Subiectul 4. Prof. *Eugen Radu*, Bucureşti

Detalii rezolvare	Barem asociat
$f(z) = f(y) \Leftrightarrow z^2 - y^2 = 2(\overline{z} - \overline{y})$	**1 punct**
Luând module reiese $\lvert z-y\rvert\,(\lvert z+y\rvert - 2) = 0$	**1 puncte**
În cazul $\lvert z-y\rvert = 0$ obţinem $z = y$, iar în cazul $\lvert z+y\rvert = 2 \geq \lvert z\rvert + \lvert y\rvert$ obţinem $\lvert z\rvert = \lvert y\rvert = 1$ şi $z = xy, x \in \mathbb{R}_+$, deci, în toate cazurile, $f(y) = f(z)$ implică $y = z$	**2 puncte**
$g(n) = [n\sqrt[3]{3}] - n + 1$, deoarece cel mai mare cub perfect din intervalul dat este $[n\sqrt[3]{3}]$	**1 punct**
$g(n+1) - g(n) = [n\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{3}] - [n\sqrt[3]{3}] - 1 \in \{0, 1\}$ arată că şirul $(g(n))_n$ este crescător şi diferenţa oricăror doi termeni consecutivi este cel mult 1, iar $g(n) > n(\sqrt[3]{3} - 1)$ arată că şirul este nemărginit, deci mulţimea valorilor termenilor şirului este $\mathbb{N}^*$	**2 puncte**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 09.02.2013 –
CLASA A X-A

SUBIECTELE

Problema 1. Să se arate că imaginea funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată prin

$$f(x) = \sqrt[3]{1 + 2^x} + \sqrt[3]{1 - 2^x}$$

este inclusă în intervalul $(0, 2)$.

Problema 2. Fie a, b, x, y numere reale din intervalul $(1, \infty)$. Să se demonstreze că

$$(\lg x) \cdot (\log_a x) + (\lg y) \cdot (\log_b y) \geq (\lg xy) (\log_{ab} xy) .$$

Problema 3. Fie A, B, C trei puncte distincte în planul complex şi a, b, c afixele acestora. Să se arate că triunghiul ABC este echilateral dacă şi numai dacă

$$\frac{a - b}{\overline{a} - \overline{b}} + \frac{b - c}{\overline{b} - \overline{c}} + \frac{c - a}{\overline{c} - \overline{a}} = 0.$$

Problema 4. a) Considerăm mulţimea $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$. Să se arate că funcţia $f : D \to \mathbb{C}$ dată prin

$$f(z) = z^2 - 2\overline{z}$$

este injectivă.

b) Să se arate că funcţia $g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ dată prin

$$g(n) = \text{ numărul cuburilor perfecte din intervalul } [n^3,\ 3n^3]$$

este surjectivă.

Toate subiectele sunt obligatorii şi se notează cu puncte de la 0 la 7
Timp de lucru: 3 ore