OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - BRĂILA, 22 februarie 2015
CLASA A VI-A

1. Arătați că $3^{2015}+4^{2015}<5^{2015}$.

George-Florin Șerban, Brăila

2. Fie numerele raționale pozitive $a_1, a_2, a_3, ..., a_{2015}$ astfel încât

$$\frac{1}{a_1+1}+\frac{2}{a_2+2}+...+\frac{2015}{a_{2015}+2015}=2000.$$

Arătați că suma $\frac{a_1}{a_1+1}+\frac{a_2}{a_2+2}+...+\frac{a_{2015}}{a_{2015}+2015}$ este un număr de forma $2^n-1,\ n\in\mathbb{N}$.

Octavia Popa, Brăila

3. Fie $M_1, M_2, M_3, ..., M_n$ puncte coliniare în această ordine, astfel încât:

$$M_1M_2=9;\ \ M_2M_3=17,\ \ M_3M_4=33,\ \ M_4M_5=65,\ \ ...,\ \ M_{n-1}M_n.$$

a) Aflați lungimea segmentului $[M_8M_9]$.

b) Aflați $n\in\mathbb{N}$ dacă $M_1M_n=8194$.

c) Aflați lungimea segmentului M_2A unde *A* este mijlocul segmentului $[M_7M_9]$.

Daniela Tilincă și Adriana Mihăilă, Brăila

4. Fie $\sphericalangle AOD$ cu $m(\sphericalangle AOD)=98^0$ și $(OB$, $(OC$ semidrepte incluse în interiorul $\sphericalangle AOD$, $(OC$ semidreaptă inclusă în interiorul $\sphericalangle BOD$ astfel încât

$$a\cdot m(\sphericalangle AOB)=c\cdot m(\sphericalangle BOC)\ \text{ și }\ b\cdot m(\sphericalangle BOC)=c\cdot m(\sphericalangle COD),$$

unde *a*, *b*, *c* sunt numere prime care verifică relația $3a+5(3b+7c)=195$.

Să se afle $m(\sphericalangle AOB)$, $m(\sphericalangle BOC)$ și $m(\sphericalangle COD)$.

Carmen Botea și Viorel Botea, Brăila

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - BRĂILA, 22 februarie 2015
CLASA A VI-A - Soluții

1. Arătați că $3^{2015}+4^{2015}<5^{2015}$.

George-Florin Șerban, Brăila

Soluție.

$$5^{2015}=5^2\cdot5^{2013}=\left(3^2+4^2\right)\cdot5^{2013}=3^2\cdot5^{2013}+4^2\cdot5^{2013}>$$
$$>3^2\cdot3^{2013}+4^2\cdot4^{2013}=3^{2015}+4^{2015}.$$

2. Fie numerele raționale pozitive $a_1,a_2,a_3,...,a_{2015}$ astfel încât

$$\frac{1}{a_1+1}+\frac{2}{a_2+2}+...+\frac{2015}{a_{2015}+2015}=2000.$$

Arătați că suma $\frac{a_1}{a_1+1}+\frac{a_2}{a_2+2}+...+\frac{a_{2015}}{a_{2015}+2015}$ este un număr de forma $2^n-1,\ n\in\mathbb{N}$.

Octavia Popa, Brăila

Soluție. Notăm S$=\frac{a_1}{a_1+1}+\frac{a_2}{a_2+2}+..........+\frac{a_{2015}}{a_{2015}+2015}$ și adunând cu $\frac{1}{a_1+1}+\frac{2}{a_2+2}+...+\frac{2015}{a_{2015}+2015}=2000$, obținem $S=16-1=2^4-1$.

3. Fie $M_1,M_2,M_3,...,M_n$ puncte coliniare în această ordine, astfel încât:

$$M_1M_2=9;\ M_2M_3=17,\ M_3M_4=33,\ M_4M_5=65,\ ...,\ M_{n-1}M_n.$$

a) Aflați lungimea segmentului $\left[M_8M_9\right]$.

b) Aflați $n\in\mathbb{N}$ dacă $M_1M_n=8194$.

c) Aflați lungimea segmentului M_2A unde A este mijlocul segmentului $\left[M_7M_9\right]$.

Daniela Tilincă și Adriana Mihăilă, Brăila

Soluție. a) $M_nM_{n+1} = 2^{n+2} + 1; M_8M_9 = 2^{10} + 1 = 1025.$

b)

$M_1M_n = M_1M_2 + M_2M_3 + M_3M_4 + ... + M_{n-1}M_n =$

$= (2^3 + 1) + (2^4 + 1) + ... + (2^{n+1} + 1) = 2^{n+2} - 2^3 + n - 1 = 8194$

$M_1M_{10} = 2^{11+2} - 8 + 11 - 1 = 2^{13} + 2 = 8194 \Rightarrow n = 11.$

c)

$M_2A = M_2M_7 + M_7M_9 : 2 = (2^4 + 1) + (2^5 + 1) + (2^6 + 1) + (2^7 + 1) + (2^8 + 1) + [(2^9 + 1) + (2^{10} + 1)] : 2 =$

$= (2^9 - 2^4) + 5 + 2^8 + 2^9 + 1 = 1270.$

4. Fie $\sphericalangle AOD$ cu $m(\sphericalangle AOD) = 98^0$ și $(OB$, $(OC$ semidrepte incluse în interiorul $\sphericalangle AOD$, $(OC$ semidreaptă inclusă în interiorul $\sphericalangle BOD$ astfel încât

$$a \cdot m(\sphericalangle AOB) = c \cdot m(\sphericalangle BOC) \text{ și } b \cdot m(\sphericalangle BOC) = c \cdot m(\sphericalangle COD),$$

unde *a*, *b*, *c* sunt numere prime care verifică relația $3a + 5(3b + 7c) = 195$.

Să se afle $m(\sphericalangle AOB)$, $m(\sphericalangle BOC)$ și $m(\sphericalangle COD)$.

Carmen Botea și Viorel Botea, Brăila

Soluție. $3a + 5(3b + 7c) = 195 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow 5(3b + 7c) = 180 \Rightarrow c = 3 \Rightarrow b = 5$

Rezultă că $\begin{cases} m(\angle AOB) + m(\angle BOC) + m(\angle COD) = 98^0 \\ 5 \cdot m(\angle AOB) = 3 \cdot m(BOC) \\ 5 \cdot m(\angle BOC) = 3 \cdot m(COD) \end{cases}$

$\Rightarrow m(\angle AOB) = 18^0 \Rightarrow m(\angle BOC) = 30^0 \Rightarrow m(\angle COD) = 50^0$.