OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
CLASA a VI-a
16.02.2013

Subiectul I.(20 puncte)

Fie fracția: $\dfrac{2^{2n}\cdot 25^{n}\cdot 7^{n}\cdot 13+2^{2n+8}\cdot 5^{2n+1}\cdot 7^{n}+28^{n+1}\cdot 25^{n+1}+4^{n+1}\cdot 5^{2n+1}\cdot 7^{n}}{3^{n}\cdot 7^{n+2}\cdot 11^{n+1}+21^{n+1}\cdot 11^{n+2}-1067\cdot 231^{n}}$.

a) Simplificați fracția pentru n=1.

b) Arătați că fracția se poate simplifica cu 2013, $(\forall)$ n$\in$ **N**.

prof. Mihai Mărcuş, Lic. T. Nicolae Bălcescu Cluj-Napoca

Subiectul II.(20 puncte)

a) Determinați numerele naturale a şi b ştiind că b este prim şi că $a^2+a^4+b^6=20944$;

b) Determinați numerele x, y, z ştiind că $x+y, y+z, z+x$ sunt direct proporționale cu 5;9;12 şi că $\dfrac{5xy-2yz}{z+y-x}=36$.

prof. Vasile Şerdean, Şcoala Gimnazială nr. 1 Gherla

Subiectul III.(20 puncte)

Numerele naturale 1, 2, 3,…, 2013 sunt scrise pe cartonaşe, cu fața scrisă în jos. Spunem că un cartonaş este "cu noroc" dacă numărul scris pe el este divizibil cu 20 sau cu 13. Care este cel mai mic număr de cartonaşe pe care trebuie să le întoarcem, fără a privi, pentru a fi siguri că cel puțin unul dintre ele este "cu noroc"?

prof. Sorin Borodi, Liceul Teoretic "Alexandru Papiu Ilarian" Dej

Subiectul IV.(30 puncte)

În jurul unui punct O se construiesc n unghiuri, primul având măsura x^0, al doilea $(2x)^0$, al treilea $(3x)^0$, şi aşa mai departe, al n-lea având măsura 120^0.($n, x\in\mathbf{N}^*$)

a) Determinați numărul unghiurilor construite;

b) Calculați măsura penultimului unghi construit.

prof.Ioan Balica,Lic.de Informatică Tiberiu Popoviciu Cluj-Napoca

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timp efectiv de lucru - 2 ore.

Barem clasa a VI-a
(OLM 2013-etapa locală)

Of. 10 p

Subiectul I.

a) $$\frac{100\cdot(13+256\cdot5+700+20)}{3\cdot11^2\cdot(49+231-97)}=\frac{100\cdot2013}{3\cdot11^2\cdot183}=\frac{100\cdot2013^{(2013}}{33\cdot2013}=\frac{100}{33}$$ **(10 puncte)**

b) $$\frac{2^{2n}\cdot5^{2n}\cdot2013}{3^n\cdot11^{n+1}\cdot183}=\frac{2^{2n}\cdot5^{2n}\cdot2013^{(2013}}{3^n\cdot11^n\cdot2013}=\frac{2^{2n}\cdot5^{2n}}{3^n\cdot11^n}$$ **(10 puncte)**

Subiectul II.

a) $a^2\cdot\left(a^2+1\right)+b^6=20944$

$a^2\cdot\left(a^2+1\right)$ şi 20944 sunt pare $\Rightarrow b$ este prim şi par $\Rightarrow b=2$ **(5 puncte)**

$\Rightarrow a^2\cdot\left(a^2+1\right)=20944-2^6\Leftrightarrow a^2\cdot\left(a^2+1\right)=20880\Leftrightarrow$ **(5 puncte)**

$a^2\cdot\left(a^2+1\right)=12^2\cdot\left(12^2+1\right)\Leftrightarrow a=12$

b) $x+y+z=13k\Rightarrow\begin{cases}x=4k\\y=k\\z=8k\end{cases}\Rightarrow k=45\Rightarrow\begin{cases}x=180\\y=45\\z=360\end{cases}$ **(10 puncte)**

Subiectul III.

Multiplii lui 20 mai mici ca 2013 sunt $20\cdot1, 20\cdot2, ..., 20\cdot100$, adică 100 numere.

Multiplii lui 13 mai mici ca 2013 sunt $13\cdot1, 13\cdot2, ..., 13\cdot154$, adică 154 numere.

Deoarece 20 şi 13 sunt prime între ele $\Rightarrow[20;13]=20\cdot13=260$. **(10 puncte)**

Multiplii lui 260 mai mici ca 2013 sunt $260\cdot1, 260\cdot2, ..., 260\cdot7$, adică 7 numere.

În consecință, numărul de cartonaşe “cu noroc” este $100+154-7=247$.

Numărul de cartonaşe care nu sunt “cu noroc” va fi $2013-247=1766$.

În situația extremă, cea mai “ghinionistă”, se poate întâmpla ca primele 1766 de cartonaşe întoarse să fie chiar cele care nu sunt “cu noroc”; chiar şi în această situație, următorul cartonaş întors va fi “cu noroc”.

În concluzie, răspunsul este 1767. **(10 puncte)**

Subiectul IV.

a) Ultimul unghi construit are măsura $(nx)^0$, deci $nx=120$.(1) **(5 puncte)**

Suma măsurilor unghiurilor construite este 360^0, deci

$x+2x+3x+...+nx=360\Rightarrow\frac{n(n+1)}{2}\cdot x=360\Rightarrow n(n+1)\cdot x=720$ (2) **(10 puncte)**

Împărțind relația (2) la relația (1) se obține $n+1=6\Rightarrow n=5$. **(5 puncte)**

b) $nx=120\Rightarrow5x=120\Rightarrow x=24$

În total sunt 5 unghiuri, penultimul va avea măsura $(4x)^0=96^0$. **(10 puncte)**