Olimpiada Nationala de Matematica

etapa locala- 16 februarie 2013

Clasa a XII-a

Subiecte

Varianta 3

1. Un şir este definit prin relaţia de recurenţă $a_n = 40 - 4a_{n-1}$ cu $a_0 = -4$. Se ştie că există constantele reale *r*, *s* şi *t* astfel încât $a_i = r \times s^i + t$, pentru orice număr natural *i*. Aflaţi $r^2 + s^2 + t^2$.

2. Se consider polinomul $f(x) = 17x^4 + 21x^3 + 60x^2 + Ax + B$. Să presupunem că pentru orice rădăcină *x* a ecuaţiei f(*x*) = 0, şi $\frac{1}{x}$ este rădăcină a acelei ecuaţii. Calculaţi *A* + *B*.

3. Calculaţi $\int_0^{\pi} \frac{\cos 4x - \cos 4a}{\cos x - \cos a} dx$.

4. Găsiţi limita $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} \prod_{j=1}^{n} (n^2 + j^2)^{1/n}$.

NOTA : Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se noteaza de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect se va redacta pe o foaie separată.

Olimpiada Naţionala de Matematică

Etapa locală, 16 februarie 2013

Județul Argeș

Barem clasa a XII – a

1. Determinarea formei generale a sirului, utilizand ipotezele ... 2p
   Aflarea constantelor *r*, *s* si *t* 3p
   Calculul lui $r^2+s^2+t^2$ 2p

2. Aflarea lui $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$ 1p
   Determinarea lui $x_1+x_2+x_3+x_4$ 1p
   Folosirea rela□iilor lui Viete în determinarea lui *A* 2p
   Acelea□i rela□ii □i pentru B 2p
   Finalizare 1p
3. Folosirea rela□iei $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.... 2p
   Determinarea efectivă a formei func□iei de integrat 2p
   Folosirea rela□iei $\int_0^{\pi} \cos^{2k+1} x\, dx = 0$ ... 2p
   Finalizare 1p
4. Găsirea rela□iilor

$$x_n = \prod_{j=1}^{n}\left(\frac{(n^2+j^2)}{n^{(2n)}}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)} = \left(\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{n^2}{n^2}+\frac{j^2}{n^2}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)}\right) = \left(\prod_{j=1}^{n}\left(1+\frac{j^2}{n^2}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)}\right)$$

....2p

Prin logaritmare se ob□ine

$$\ln x_n = \ln\left(\prod_{j=1}^{n}\left(1+\frac{j^2}{n^2}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)}\right) = \frac{\left(\sum_{j=1}^{n}\ln\left(1+\frac{j^2}{n^2}\right)\right)}{n}$$

...2p

Se determină integrala

$$\int_0^1 \ln\left(1+x^2\right) dx$$

...2p

Finalizare 1p

B-dul Eroilor nr. 4-6,
Piteşti, Jud. Argeş,
Tel: +40 (0)248 218 319
Fax: +40 (0)248 219 743
www.isjarges.ro

Str. General Berthelot nr. 28-30,
Sector 1, 010168, Bucuresti
Tel: +40 (0)21 405 57 06
Fax: +40 (0)21 310 32 05
www.edu.ro