OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALA – 25 IANUARIE 2014

Clasa a X-a

Problema 1. a) Arătați că $\log_a \sqrt{x} + \log_{a^2} \sqrt[3]{x} + \log_{a^3} \sqrt[4]{x} + \cdots + \log_{a^n} \sqrt[n+1]{x} = \log_a \sqrt[n+1]{x^n}$; $\forall a, x \in (0,\infty)$, $a \neq 1$.

b) Determinați partea întreagă a numărulu $N = \log_{2013} 2014 + \log_{2014} 2013 + 2013^{\log_{2014} 2015} - 2015^{\log_{2014} 2013}$.

Adriana Constantin, Călărași

Problema 2. a) Arătați că, pentru oricare două numere complexe z_1, z_2, egalitatea $|z_1| + |z_2| = |z_1 + z_2|$ este adevărată dacă și numai dacă $\exists \alpha \in (0,\infty)$ astfel încât $z_1 = \alpha z_2$.

b) Determinați mulțimile $A = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \left|z^2 + 2z + 2\right| + \left|z^2 + 2z + 1\right| = 1 \right\}$ și $M = \left\{ \operatorname{Re} z \mid z \in A \right\}$.

Viorica Stoianovici, Călărași

Problema 3. a) Dacă $a \in (0,+\infty)$ arătați că $\left\{ \sqrt[3]{1+a^x} + \sqrt[3]{1-a^x} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\} \subset (0,2)$.

b) Dacă n, $m \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ arătați că $\dfrac{1}{2\sqrt[m]{1}} + \dfrac{1}{3\sqrt[m]{2}} + \ldots + \dfrac{1}{(n+1)\sqrt[m]{n}} < m$.

***

Problema 4. Fie numerele complexe distincte a, b, c astfel încât $(a+b)^3 = (b+c)^3 = (c+a)^3$. Să se arate că $a^3 = b^3 = c^3$.

Gazeta Matematică

SUCCES!

Baremul de notare este: Problema 1. a) 3 puncte; b) 4 puncte; **Problema 2.** a) 3 puncte; b) 4 puncte; **Problema 3.** a) 3 puncte; b) 4 puncte; **Problema 4.** 7 puncte.

Str. Sloboziei, nr. 28, 910001
Mun. Călărași, Jud. Călărași
Tel: +40 0242 315 949
Fax: +40 0242 312 810
www.isj.cl.edu.ro

ENUNȚURI ȘI SOLUȚII

CLASA a IX-A

P1. IX. Dacă $a,\ b,\ c\in\mathbb{R}$ arătați că:

a) $(a+1)^2+b^2+(c-1)^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca+c-a-1)$;

b) $(a+1)b+(c-1)b+(a+1)(c-1)\le(a+1)^2+b^2+(c-1)^2$;

c) $ab+bc+ca+\max\{|a-b|,\ |b-c|,\ |c-a|\}\le 1+\frac{1}{3}(a+b+c)^2$.

Demonstrație: Putem presupune $a\le b\le c\Rightarrow\max\{|a-b|,\ |b-c|,\ |c-a|\}=c-a$

$ab+bc+ca-a+c-1=(a+1)b+(c-1)b+(a+1)(c-1)\le(a+1)^2+b^2+(c-1)^2=$

$(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca+c-a-1)\Rightarrow ab+bc+ca+\max\{|a-b|,\ |b-c|,\ |c-a|\}\le 1+\frac{1}{3}(a+b+c)^2$.

P2. IX. Fie $x,\ y\in\mathbb{R}^*$, astfel încât $x+y\ne 0$ și $(a_n)_{n\ge1}$, $(b_n)_{n\ge1}$ două șiruri de numere reale. Arătați că:

a) Dacă $(a_n)_{n\ge1}$ și $(b_n)_{n\ge1}$ sunt progresii aritmetice atunci șirul $(c_n)_{n\ge1}$, definit prin $c_n=a_nb_n,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$, este progresie aritmetică dacă și numai dacă una din progresiile aritmetice $(a_n)_{n\ge1}$ sau $(b_n)_{n\ge1}$ are rația egală cu 0.

b) Dacă $(1+xa_{n+1})(1+ya_n)=1,\ (x+y)(a_nb_n-1)=xya_n$ și $(x+y)b_n-xy\ne0,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ atunci șirul $(b_n)_{n\ge1}$ este progresie geometrică.

Demonstrație: a) $(x_n)_{n\ge1}$ este progresie aritmetică $\Leftrightarrow 2c_n=c_{n-1}+c_{n+1}\Leftrightarrow 2a_nb_n=(a_n-x)(b_n-y)+$
$+(a_n+x)(b_n+y)\Leftrightarrow xy=0$

b) $(x+y)(a_nb_n-1)=xya_n\Leftrightarrow a_n=\dfrac{x+y}{(x+y)b_n-xy}\ \ \forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow(1+xa_{n+1})(1+ya_n)=1\Leftrightarrow b_{n+1}=-\dfrac{x}{y}b_n$

P3. IX. Fie șirul de numere reale $(a_n)_{n\ge1}$, definit prin $a_1=\dfrac{1}{6}$ și $a_{n+1}=\dfrac{n+1}{n+3}\left(a_n+\dfrac{1}{2}\right),\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Determinați a_{2014}.

Demonstrație:

$n=1\text{:}\ a_2=\frac{2}{4}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6}=\frac{2}{6}$

$n=2\text{:}\ a_3=\frac{3}{5}\left(\frac{2}{6}+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{6}=\frac{3}{6}$

P(n): $a_n=\frac{n}{6}$

P(1): $a_1=\frac{1}{6}$ (A)

....

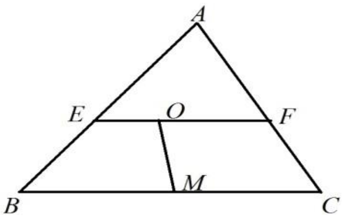
P(n+1): $a_{n+1}=\frac{n+1}{6}$

$a_{n+1}=\frac{n+1}{n+3}\left(\frac{n}{6}+\frac{1}{2}\right)=\frac{n+1}{n+3}\cdot\frac{n+3}{6}=\frac{n+1}{6}$

$Deci\ a_{2000}=\frac{2000}{6}=\frac{1000}{3}$

P4. IX. Dacă ABC este un triunghi oarecare și E, F, O, M sunt puncte cu proprietățile $E \in (AB)$, $F \in (AC)$, $O \in (EF)$, $M \in (BC)$, $\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{BC}$, $5\overrightarrow{AE} = 7\overrightarrow{EB}$ și $12\overrightarrow{OM} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ demonstrați că $EF \parallel BC$.

Demonstrație: $5\overrightarrow{AE} = 7\overrightarrow{EB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AE} = \frac{7}{12}\overrightarrow{AB}$, fie $x \in (0,\infty)$ astfel încât $\overrightarrow{AF} = x\overrightarrow{FC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AF} = \frac{x}{x+1}\overrightarrow{AC}$;



$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} = -\frac{7}{12}\overrightarrow{AB} + \frac{x}{x+1}\overrightarrow{AC}$ (1); $12\overrightarrow{OM} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{OB} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ (2); $\overrightarrow{EO} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BO} \overset{(2)}{=} -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ (3); vectorii $\overrightarrow{EF}$ și $\overrightarrow{EO}$ coliniari $\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{EF} = \alpha\overrightarrow{EO} \overset{(1),(3)}{\Leftrightarrow} \alpha = \frac{7}{4}$ și $x = \frac{7}{5} \Rightarrow EF \parallel BC$.

CLASA a X-A

P1. X. a) Arătați că $\log_a \sqrt{x} + \log_{a^2} \sqrt[3]{x} + \log_{a^3} \sqrt[4]{x} + \cdots + \log_{a^n} \sqrt[n+1]{x} = \log_a \sqrt[n+1]{x^n}$; $\forall a, x \in (0,\infty)$, $a \neq 1$.

Solutie :

a) $\frac{1}{2}log_a x + \frac{1}{2\cdot 3}log_a x + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}log_a x$ ……………………………………………….1 punct

$log_a x \cdot (\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}) = log_a x \cdot (\frac{1}{1} - \frac{1}{n+1})$………………………………………..1 punct

Finalizare ……………………………………………………………………………1 punct

b) Determinați partea întreagă a numărulu $N = \log_{2013} 2014 + \log_{2014} 2013 + 2013^{\log_{2014} 2015} - 2015^{\log_{2014} 2013}$.

Solutie :

b) $2013^{\log_{2014} 2015} - 2015^{\log_{2014} 2013} = 0$…………………………………………………… 1punct

$x = log_{2013} 2014 \in (1,2)$ ……………………………………………………… 1 punct

$x + \frac{1}{x} \in [2,3)$ ……………………………………………………………………1punct

Finalizare [N] = 2 ………………………………………………………………….1 punct

P2. X. a) Arătați că, pentru oricare două numere complexe z_1, z_2, egalitatea $|z_1| + |z_2| = |z_1 + z_2|$ este adevărată dacă și numai dacă $\exists \alpha \in (0,\infty)$ astfel încât $z_1 = \alpha z_2$.

Solutie :

b) Verificarea implicatiei $\leftarrow$ ……………………………………………………..1 punct

Implicatia $\rightarrow$

$z_k = a_k + b_k \cdot i$ si calcul …………………………………………………… 1 punct

Obtinerea relatiei $a_1 b_2 = b_1 a_2$ si finalizare ……………………………..1 punct .

c) Determinați mulțimile $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z^2 + 2z + 2| + |z^2 + 2z + 1| = 1\}$ și $M = \{\operatorname{Re} z \mid z \in A\}$.

Solutie :

b) $\left|z^2+2z+2\right|+\left|z^2+2z+1\right|=1 \Leftrightarrow \left|z^2+2z+2\right|+\left|z^2+2z+1\right|=\left|z^2+2z+2+\left(-z^2-2z-1\right)\right| \Leftrightarrow$ ......2 puncte

$\exists \alpha \in (0,\infty)$ astfel încât $(\alpha+1)z^2+2(\alpha+1)z+\alpha+2=0 \Leftrightarrow z=-1\pm\frac{\sqrt{\alpha+1}}{\alpha+1}i$ ………………1 punct

Aflarea elementelor multimilor ……………………………………………………1 punct

P3. X. a) Arătați că $\{\sqrt[3]{1+a^x}+\sqrt[3]{1-a^x} | x\epsilon\mathbb{R}\} \subset (0,2)$

Solutie :

a) Verificare $\sqrt[3]{1+a^x}+\sqrt[3]{1-a^x} > 0$ …………………………………..1 punct

$\sqrt[3]{1+a^x}+\sqrt[3]{1-a^x} < 1+1$ ……………………………………………1 punct

$\sqrt[3]{1+a^x}-1 < 1-\sqrt[3]{1-a^x}$; amplificare cu conjugata

Finalizare $\sqrt[3]{1+a^x}+\sqrt[3]{1-a^x} < 2$ ………………………………1punct .

b) Dacă $n,\ m\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ arătați că $\frac{1}{2\sqrt[m]{1}}+\frac{1}{3\sqrt[m]{2}}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\sqrt[m]{n}}<m.$

Solutie :

b) $\frac{1}{(k+1)\sqrt[m]{k}}=\sqrt[m]{k^{m-1}}\cdot\frac{1}{k(k+1)}=\sqrt[m]{k^{m-1}}\cdot(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})$ ………………………… 1 punct

$\sqrt[m]{k^{m-1}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[m]{k}}-\frac{1}{\sqrt[m]{k+1}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[m]{k^{m-1}}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[m]{(k+1)^{m-1}}}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt[m]{k}}-\frac{1}{\sqrt[m]{k+1}}\right)\cdot(1+\cdots+\sqrt[m]{\left(\frac{k}{k+1}\right)^{m-1}})<$

$<\left(\frac{1}{\sqrt[m]{k}}-\frac{1}{\sqrt[m]{k+1}}\right)\cdot m$ ……………………………………………………2 puncte

Inlocuire si finalizare ……………………………………………………1 punct

P4. X. Fie numerele complexe distincte $a,\ b,\ c$ astfel încât $(a+b)^3=(b+c)^3=(c+a)^3$. Să se arate că $a^3=b^3=c^3$.

Solutie :

Din relatia din enunt si tinand cont de faptul ca a, b,c sunt disticte , rezulta ca a+b , b+c , c+a sunt distincte si nenule ………………………………………………….1 punct

Atunci $(\frac{a+b}{b+c})^3=(\frac{a+b}{c+a})^3=1$, de unde $a+b=\varepsilon(b+c)=\varepsilon^2(c+a)$, unde $\varepsilon\epsilon\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ si $\varepsilon^3=1$

……………………………………………………………………….. 3 puncte

Adunand membru cu membru relatiile $a+b=\varepsilon(b+c)$, $b+c=\varepsilon(c+a)$, $c+a=\varepsilon(a+b)$

Se obtine $a+b+c=0$ ……………………………………………….. 1 punct

Finalizare ……………………………………………………………. 2 puncte

CLASA a XII-A

P1. XII. a) Fie $(G,\cdot)$ un grup și e elementul său neutru. Elementele $a,\ b\in G$ satisfac condiția: $a^2=b^2=(ab)^2$. Să se arate că $a^4=b^4=e$.

b) Pe mulțimea A se definesc legile de compoziție „+” și „·” cu proprietășile: $(A,+)$ este grup comutativ, $(A,\cdot)$ este monoid necomutativ și $a(b+c)=ab+ac$, $(b+c)a=ba+ca$, $a^2+b^2=ab$; $a,\ b,\ c\in A$. Să se arate că $(ab)^2=b^2a^2$ și $(ba)^2=a^2b^2$.

Demonstrație: a)

$a^2=(ab)^2 \Leftrightarrow a^2=abab \Rightarrow a=bab$

$b^2=(ab)^2 \Rightarrow b^2=abab \Rightarrow b=aba$

Atunci $ab=(bab)\cdot(aba) \Leftrightarrow ab=b(aba)ba \Leftrightarrow ab=b^3a$

Înmulțind la dreapta cu a obținem $aba=b^3a^2 \Leftrightarrow b=b^3a^2 \Rightarrow b^2a^2=e$

Cum $a^2=b^2$, ultima egalitate se scrie $a^4=e \Leftrightarrow b^4=e$

b)

Din $a^2+b^2=ab \Rightarrow$ $a^3+ab^2=a^2b$ și $a^2b+b^3=ab^2$

de unde, prin adunare, se obține $a^3+b^3=0$

Tot $a^2+b^2=ab \Rightarrow$ $a^4+a^2b^2=a^3b$ și $a^2b^2=-a^4-b^4$ (1)

$a^2+b^2=ab \Rightarrow$ $b(a^2+b^2)a=baba \Rightarrow$ $ba^3+ab^3=(ba)^2$ (2)

$a^3+b^3=0$ $\Rightarrow$ $ba^3+ab^3=-b^4-a^4$ (3)

Din (1), (2) și (3) $\Rightarrow$ $(ba)^2=a^2b^2$

Pe de altă parte, $(ab)^2=(a^2+b^2)^2=a^4+b^4+a^2b^2+b^2a^2$ și (1) implică $(ab)^2=b^2a^2$

P2. XII. Fie p un număr prim de forma $4k+3,\ k\in\mathbb{N}$.

a) Să se arate că nu există $x\in\mathbb{Z}_p$ astfel încât $x^2+\hat{1}=\hat{0}$ (în $\mathbb{Z}_p$).

b) Să se arate că dacă $x^2+y^2=\hat{0},\ x,y\in\mathbb{Z}_p$, atunci $x=\hat{0}$ și $y=\hat{0}$.

c) Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuația $x^2+y^2=12005$.

Demonstrație:

a). Aplicăm Mica teoremă a lui Fermat: dacă
$(x,p)=1, x\in\mathbb{Z}\Rightarrow p/x^{p-1}-1\Rightarrow p/x^{4k+2}-1.$
Presupunem că există $x\in\mathbb{Z}_p$ astfel încât
$x^2+\hat{1}=\hat{0}\Leftrightarrow x^2=-\hat{1}\Rightarrow x^{2(2k+1)}=\left(-\hat{1}\right)^{2k+1}\Rightarrow \hat{1}=-\hat{1}(fals).$

b). Presupunem că $(\exists)x,y\in\mathbb{Z}_p^*$ astfel
încât $x^2+y^2=\hat{0}\Leftrightarrow\left(xy^{-1}\right)^2+\hat{1}=\hat{0}(fals).$ În concluzie singura soluție este
$x=y=\hat{0}.$

c). Ecuația se mai scrie $x^2+y^2=2401\cdot 5.\Leftrightarrow x^2+y^2=7^4\cdot 5.$ Reducând
ecuația în $\mathbb{Z}_7\Rightarrow x^2+y^2=\hat{0}, x,y\in\mathbb{Z}_7\Rightarrow x=y=\hat{0}.$
Deci $x=7\cdot a,\ y=7\cdot b,\ a,b\in\mathbb{Z}.$
Ecuația devine
$a^2+b^2=49\cdot 5;$
La fel $a=7m,\ b=7n\Rightarrow m^2+n^2=5\Leftrightarrow$
$(m,n)\in\{(2,1),(2,-1),(-2,1),(-2,-1)(1,2),(-1,2)(1,-2),(-1,-2)\}\Rightarrow$
$(x,y)\in\{(98,49),(08,-49),(-98,49),(-98,-49),\}\cup$
$\{(49,98),(-49,98),(49,-98),(-49,-98)\}.$

P3. XII. Dacă $x\in(0,\infty)$ calculați:

a) $\displaystyle\int\frac{1}{x\left(x^{2014}+1\right)}dx;$

b) $\displaystyle\int\frac{1}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}dx.$

Demonstrație: a) $\displaystyle\frac{1}{x\left(x^{2014}+1\right)}=\frac{1}{x}-\frac{x^{2013}}{x^{2014}+1}\Rightarrow\int\frac{1}{x\left(x^{2014}+1\right)}dx=\ln x-\frac{1}{2014}\ln\left(x^{2014}+1\right)+c,\ c\in\mathbb{R}$

b) $\displaystyle\int\frac{1}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}dx=\int\frac{1+\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx+\frac{1}{2}\int 1dx-\frac{1}{2}\int\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}}dx$

P4. XII. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție care admite primitive. Să se arate că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=|x|f(x)$ admite primitive.

$g(x)=\begin{cases} x\cdot f(x), x\geq 0 \\ -x\cdot f(x), x<0 \end{cases}$; f admite primitive $\Rightarrow \exists F:R\to R$, derivabilă, cu $F`=f$

$x\cdot f(x)=[x\cdot F(x)]`-F(x)$

F derivabilă $\Rightarrow F$ continuă $\Rightarrow F$ admite primitive. Fie $H:R\to R$, derivabilă, cu $H`=F$

$x\cdot f(x)=[x\cdot F(x)]`-H`(x)=[x\cdot F(x)-H(x)]`$; $-x\cdot f(x)=[-x\cdot F(x)+H(x)]`$

Definim funcția $G:R\to R, G(x)=\begin{cases} xF(x)-H(x)+c, x\geq 0 \\ -xF(x)+H(x)+c`, x<0 \end{cases}$. $F$, $H$ sunt derivabile pe $R\Rightarrow G$ derivabilă pe $R^*$ și $G`=g$ pe R^*

G continuă în $x_0=0\Rightarrow c`=c-2H(0)\Rightarrow G(x)=\begin{cases} xF(x)-H(x)+c, x\geq 0 \\ -xF(x)+H(x)+c-2H(0), x<0 \end{cases}$

$$G`_d(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{xF(x)-H(x)+c+H(0)-c}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(F(x)-\frac{H(x)-H(0)}{x}\right)=F(0)-H`(0)=F(0)-F(0)=0$$

$$G`_s(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{-xF(x)+H(x)+c-2H(0)+H(0)-c}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\left(-F(x)+\frac{H(x)-H(0)}{x}\right)=-F(0)+H`(0)=-F(0)+F(0)=0$$

$\Rightarrow G$ derivabilă în $x_0=0$ și $G`(0)=g(0)=0$. În concluzie, G e o primitivă pentru g, deci funția g admite primitive.

CLASA a XI-A

P1. XI. Fie A o matrice pătratică de ordin 3, cu toate elementele din mulțimea $\{-1,1\}$.

a) Determinați toate valorile posibile ale determinantului matricei A.

b) Demonstrați că matricea A^n, $n\in\mathbb{N}^*$, are toate elementele nenule.

Demonstrație:

a) Dacă adunăm prima linie la liniile 2 și 3, pe aceste linii vor fi numai numere pare. Scoatem factor 2 de pe fiecare dintre ele și obținem că determinantul matricei A, care este număr întreg, se divide cu 4.

Însă $\det A$ este sumă de șase termeni, fiecare egal cu 1 sau cu -1, prin urmare are valoarea cuprinsă între -6 și 6. Rezultă că $\det A\in\{-4,0,4\}$ și se constată imediat că toate cele trei valori sunt posibile.

b) Se demonstrează ușor, prin inducție matematică, faptul că matricea A^n are toate elementele impare, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$. În particular, toate elementele lui A^n vor fi nenule.

P2. XI. Fie $A,\ B\in M_3(\mathbb{R})$ astfel încât $A+B=I_3$ și $A^2=A^3$. Să se arate că:

a) $AB=BA$;

b) I_3+AB este o matrice inversabilă.

Demonstrație:

a) Scrie $B=I_3-A$

Inmulteste la stanga si la dreapta relatia anterioara cu A

Deduce AB=BA

b) Inmulteste $A+B=I_3$ la stanga cu A, $A^2+AB=A$ la dreapta cu A si obtine $ABA=O_3$

Scrie $(AB)^2=(ABA)B$ de unde $(AB)^2=O_3$

Din $I_3=I_3-(AB)^2$ deduce $\det(I_3-AB)\det(I_3+AB)=1$

Finalizeaza $\det(I_3+AB)\neq 0$

P3. XI. Se consideră șirurile de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ și $(c_n)_{n\geq 1}$ definite prin: $a_1 > 0$, $b_1 > 0$,

$a_{n+1} = a_n + 2b_n$, $b_{n+1} = a_n + b_n$, $c_n = \dfrac{a_n}{b_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că $\left|c_{n+1} - \sqrt{2}\right| = \left(\sqrt{2} - 1\right)\left|\dfrac{a_n - b_n\sqrt{2}}{a_n + b_n}\right|$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$.

Demonstrație:

a) $|c_{n+1} - \sqrt{2}| = \left|\dfrac{a_n + 2b_n - a_n\sqrt{2} - b_n\sqrt{2}}{a_n + b_n}\right| = (\sqrt{2} - 1)\left|\dfrac{a_n - b_n\sqrt{2}}{a_n + b_n}\right|$

b) $|c_{n+1} - \sqrt{2}| = (\sqrt{2} - 1)\dfrac{b_n}{a_n + b_n}|c_n - \sqrt{2}| \leq \dfrac{1}{2}|c_n - \sqrt{2}|$

P4. XI. Fie $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ o funcție crescătoare cu proprietatea că $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(2x) - f(x)\right) = 0$. Demonstrați că $\forall a \in (0,+\infty)$, există $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(ax) - f(x)\right)$ și valoarea acestei limite este 0.

Demonstrație:

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(4x) - f(2x)\right) = 0$ (1p) $\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\left(f(4x) - f(x)\right) = 0$

Prin inducție $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(2^n x) - f(x)\right) = 0$ Pentru $x \to \dfrac{x}{2^n}$,

obț $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f\left(\dfrac{x}{2^n}\right) - f(x)\right) = 0$

Fie $k \in \mathbb{Z}$ a.î. $2^k \leq a < 2^{k+1}$, f cresc $\Rightarrow$

$f(2^k x) - f(x) \leq f(ax) - f(x)) \leq f(2^{k+1}x) - f(x)$

Finalizare, cu $x \to \infty$