



Olimpiada Națională de Matematică  
Etapa Județeană și a Municipiului București, 14 martie 2015

CLASA a XII-a

**Problema 1. (a)** Rezolvați ecuația  $x^2 - x + \hat{2} = \hat{0}$ ,  $x \in \mathbb{Z}_7$ .

**(b)** Determinați numerele naturale  $n \geq 2$ , pentru care ecuația  $x^2 - x + \hat{2} = \hat{0}$ ,  $x \in \mathbb{Z}_n$ , are soluție unică.

Gazeta Matematică

**Problema 2. (a)** Calculați

$$\int_0^1 x \sin(\pi x^2) dx.$$

**(b)** Calculați

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} k \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \sin(\pi x^2) dx.$$

**Problema 3.** Determinați funcțiile continue și crescătoare  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , care îndeplinesc condiția

$$\int_0^{x+y} f(t) dt \leq \int_0^x f(t) dt + \int_0^y f(t) dt,$$

oricare ar fi  $x, y \in [0, \infty)$ .

**Problema 4.** Fie  $m$  și  $n$  două numere naturale,  $n \geq 2$ , fie  $A$  un inel care are exact  $n$  elemente și fie  $a$  un element al lui  $A$ , astfel încât  $1 - a^k$  este inversabil, oricare ar fi  $k \in \{m+1, m+2, \dots, m+n-1\}$ . Arătați că  $a$  este nilpotent (i.e., există un număr natural nenul  $p$ , astfel încât  $a^p = 0$ ).



Olimpiada Națională de Matematică  
Etapa Județeană și a Municipiului București, 14 martie 2015

CLASA a XII-a

**Problema 1. (a)** Rezolvați ecuația  $x^2 - x + \hat{2} = \hat{0}$ ,  $x \in \mathbb{Z}_7$ .

**(b)** Determinați numerele naturale  $n \geq 2$ , pentru care ecuația  $x^2 - x + \hat{2} = \hat{0}$ ,  $x \in \mathbb{Z}_n$ , are soluție unică.

Gazeta Matematică

**Soluție. (a)** Cum 4 și 7 sunt coprime, iar  $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$  este corp, ecuația dată este echivalentă cu  $\hat{4}x^2 - \hat{4}x + \hat{1} = \hat{0}$ , adică,  $(\hat{2}x - \hat{1})^2 = \hat{0}$ , deci  $\hat{2}x = \hat{1}$ , de unde  $x = \hat{4}$ . ..... **2 puncte**

**(b)** Fie  $n \geq 2$  un număr natural pentru care ecuația dată are soluție unică și fie  $a \in \mathbb{Z}_n$  soluția respectivă. Atunci  $(\hat{1} - a)^2 - (\hat{1} - a) + \hat{2} = a^2 - a + \hat{2} = \hat{0}$ , deci  $\hat{1} - a$  este soluție a ecuației date. .... **3 puncte**

Prin urmare,  $a = \hat{1} - a$ , deci  $\hat{2}a = \hat{1}$ . În particular,  $\hat{2}$  este inversabil în inelul  $\mathbb{Z}_n$  și  $a = \hat{2}^{-1}$ . Rezultă că  $\hat{2}^{-2} - \hat{2}^{-1} + \hat{2} = \hat{0}$ , de unde  $\hat{1} - \hat{2} + \hat{8} = \hat{0}$ , i.e.,  $\hat{7} = \hat{0}$ . Prin urmare,  $n$  este un divizor al lui 7, deci  $n = 7$ . .... **2 puncte**

**Problema 2. (a)** Calculați

$$\int_0^1 x \sin(\pi x^2) dx.$$

**(b)** Calculați

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} k \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \sin(\pi x^2) dx.$$

**Soluție. (a)** Făcând substituția  $t = \pi x^2$ , integrala devine

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \sin t dt = \frac{1}{2\pi} (-\cos t) \Big|_0^\pi = \frac{1}{\pi}.$$

..... **2 puncte**

**(b)** Fie  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin(\pi x^2)$ , și  $F: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ .

Atunci

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} k \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left( kF\left(\frac{k+1}{n}\right) - kF\left(\frac{k}{n}\right) \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left( (k+1)F\left(\frac{k+1}{n}\right) - kF\left(\frac{k}{n}\right) - F\left(\frac{k+1}{n}\right) \right) \\ &= \frac{1}{n} \left( nF(1) - \sum_{k=1}^n F\left(\frac{k}{n}\right) \right) = F(1) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n F\left(\frac{k}{n}\right) \end{aligned}$$

..... **3 puncte**

Limita cerută este

$$F(1) - \int_0^1 F(x) dx = \int_0^1 xF'(x) dx = \int_0^1 xf(x) dx = \frac{1}{\pi}.$$

..... **2 puncte**

**Problema 3.** Determinați funcțiile continue și crescătoare  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , care îndeplinesc condiția

$$\int_0^{x+y} f(t) dt \leq \int_0^x f(t) dt + \int_0^y f(t) dt,$$

oricare ar fi  $x, y \in [0, \infty)$ .

**Soluție.** Inegalitatea din enunț este echivalentă cu  $\int_x^{x+y} f(t) dt \leq \int_0^y f(t) dt$ , de unde  $\int_0^y f(t+x) dt \leq \int_0^y f(t) dt$ , oricare ar fi  $x \geq 0$  și  $y \geq 0$ . .... **2 puncte**

Cum  $f(t+x) \geq f(t)$ , oricare ar fi  $t \in [0, y]$  și oricare ar fi  $x \geq 0$ , rezultă că  $\int_0^y f(t+x) dt \geq \int_0^y f(t) dt$ , deci  $\int_0^y f(t+x) dt = \int_0^y f(t) dt$ , oricare ar fi  $x \geq 0$  și  $y \geq 0$ . .... **2 puncte**

Din continuitatea lui  $f$  deducem că  $f(x+y) = f(y)$ , oricare ar fi  $x \geq 0$  și oricare ar fi  $y \geq 0$ . În particular,  $f(x) = f(0)$ , oricare ar fi  $x \geq 0$ , deci  $f$  este constantă. .... **2 puncte**

Evident, orice funcție constantă verifică condițiile din enunț. .... **1 punct**

**Problema 4.** Fie  $m$  și  $n$  două numere naturale,  $n \geq 2$ , fie  $A$  un inel care are exact  $n$  elemente și fie  $a$  un element al lui  $A$ , astfel încât  $1 - a^k$  este inversabil, oricare ar fi  $k \in \{m+1, m+2, \dots, m+n-1\}$ . Arătați că  $a$  este nilpotent (i.e., există un număr natural nenul  $p$ , astfel încât  $a^p = 0$ ).

**Soluție.** Fie  $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ . Există  $p \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ , astfel încât  $m+p$  este divizibil cu  $k$ , deci  $m+p = kl$ . Cum  $1 - a^{m+p} = (1 - a^k)(1 + a^k + \dots + a^{k(l-1)})$  și  $1 - a^{m+p} \in U(A)$ , rezultă că  $1 - a^k \in U(A)$ . .... **2 puncte**

Din  $1 - a^k = (1 - a)(1 + a + \dots + a^{k-1})$ ,  $k = 1, 2, \dots, n-1$ , cu convenția  $a^0 = 1$ , rezultă că  $b_k = 1 + a + \dots + a^{k-1} \in U(A)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n-1$ . .... **2 puncte**

Dacă  $b_k$ -urile ar fi distincte două câte două, atunci  $A$  ar fi corp, deci  $a^{n-1} = 1$  și  $0 = 1 - a^{n-1} \in U(A)$  — contradicție. .... **1 punct**

Prin urmare, există  $1 \leq p < q \leq n-1$ , astfel încât  $b_p = b_q$ . Atunci  $0 = b_q - b_p = a^p b_{q-p}$ . Cum  $b_{q-p} \in U(A)$ , rezultă că  $a^p = 0$ . .... **2 puncte**