

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Locală Dâmbovița -28 februarie 2015

clasa a-X-a

SUBIECTUL 1

Determinați numerele reale x și y astfel încât $3^x + 3^y = 30$ și $\log_3 x - \log_3 y = -1$.

S.G.M.10/2014

SUBIECTUL 2 Să se determine funcțiile surjective $f: N^* \rightarrow N^*$ astfel încât

$$\frac{1}{2f(1)} + \frac{1}{3f(2)} + \dots + \frac{1}{nf(n-1)} = \frac{n-1}{f(n)}$$

pentru orice număr natural $n \geq 2$.

S.G.M.12/2014

SUBIECTUL 3

Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$, $A = \{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \mid z^2 + a \cdot z \in \mathbb{R}\}$, $B = \{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \mid z^2 + b \cdot \bar{z} + c \cdot z \in \mathbb{R}\}$

Demonstrați că $A=B$ dacă și numai dacă $a+b=c$

Cristinel Mortici și Dinu Teodorescu

SUBIECTUL 4. Rezolvați în numere reale sistemul

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x} + 2\sqrt[6]{yz} = 13 \\ \sqrt[3]{y} + 2\sqrt[6]{xz} = 13 \\ \sqrt[3]{z} + 2\sqrt[6]{xy} = 13 \end{cases}$$

Nelu Chichirim

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.

Timp de lucru: 3 ore.

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Locală Dâmbovița -28 februarie 2015

clasa a-X-a

Bareme de corectare și notare

Subiectul 1.

$x > 0, y > 0$	1p
$\frac{x}{y} = \frac{1}{3}, 3^{\frac{y}{3}} = t, t^3 + t - 30 = 0$	3p
$(t - 3)(t^2 + 3t + 10) = 0,$	3p

Subiectul 2.

$P(n) : f(n) = nf(1), n \in \mathbb{N}$	4p
$f(1) = 1, f(n) = n$	3p

Subiectul 3.

$z^2 + a \cdot z = \bar{z}^2 + a \cdot \bar{z}$	2p
$A = \{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \mid z + \bar{z} = -a\}$	1p
$z^2 + b \cdot \bar{z} + c \cdot z = \bar{z}^2 + b \cdot z + c \cdot \bar{z}$	2p
$B = \{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \mid z + \bar{z} = b - c\}$	1p
$A = B \leftrightarrow -a = b - c \leftrightarrow a + b = c$	1p

Subiectul 4.

$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \sqrt[6]{x} = a, \sqrt[6]{y} = b, \sqrt[6]{z} = c$	1p
$a = b = c$	2p
$x = y = z = \left(\frac{13}{3}\right)^3$	1p
$x \leq 0, y \leq 0, z \leq 0, \sqrt[6]{x} = a, \sqrt[6]{y} = b, \sqrt[6]{z} = c$	1p
$a = b = c$	1p
$x = y = z = -13^3$	1p