Olimpiada Naţională de Matematică 2015

Etapa locală – Iaşi, 23 ianuarie 2015

Clasa a VI-a

Problema 1

Unghiurile $\sphericalangle AOB$ şi $\sphericalangle BOC$ sunt suplementare, iar măsura primului este de cinci ori mai mare decât măsura celui de-al doilea. Determinaţi măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOB$ şi $\sphericalangle BOC$.

Problema 2

Mulţimea M este formată din n multipli consecutivi ai lui 4. Suma celui mai mic şi celui mai mare dintre elementele lui M este 8080, iar suma celor mai mari două elemente din M este 16132.

a) Arătaţi că $n = 2015$.

b) Demonstraţi că media aritmetică a tuturor elementelor lui M este element al mulţimii M.

Problema 3

Pe semidreapta $(OB$ se consideră punctele $A_1, A_2, ..., A_k, ...$ astfel încât $OB = 2\text{ cm}$, $OA_1 = 1\text{ cm}$ şi $A_nA_{n+1} = \frac{1}{2^n}\text{cm}$, oricare ar fi numărul natural nenul n.

a) Care este cea mai mare lungime posibilă a segmentului A_1A_{10}? Dar cea mai mică?

b) Arătaţi că, indiferent de modul lor de aşezare (în condiţiile problemei), toate punctele A_n $\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ aparţin segmentului (OB).

Problema 4

Determinaţi numărul fracţiilor ireductibile şi subunitare care au suma dintre numărător şi numitor egală cu 2015.

Notă. *Timp de lucru: 2 ore*
Fiecare problemă se notează cu punctaje cuprinse între 0 şi 7.

Olimpiada Națională de Matematică 2015

Etapa locală – Iași, 23 ianuarie 2015

Clasa a VI-a Barem de corectare –

Problema 1. Unghiurile $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ sunt suplementare, iar măsura primului este de cinci ori mai mare decât măsura celui de-al doilea. Determinați măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$.

Soluție și barem

Dacă unghiurile $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ sunt adiacente, măsura unghiului format de bisectoarele lor este de 90°. 2p

$m(\sphericalangle AOB)=150^\circ$ și $m(\sphericalangle BOC)=30^\circ$ 2p

Dacă unghiurile $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ sunt neadiacente, măsura unghiului format de bisectoarele lor este de 60°. 3p

Problema 2. Mulțimea M este formată din n multipli consecutivi ai lui 4. Suma celui mai mic și celui mai mare dintre elementele lui M este 8080, iar suma celor mai mari două elemente din M este 16132.

a) Arătați că $n=2015$.

b) Demonstrați că media aritmetică a tuturor elementelor lui M este element al mulțimii M.

Soluție și barem

a) Dacă b este cel mai mare element al lui M, atunci $(b-4)+b=16132$, de unde $b=8068$. 2p

Cel mai mic element din M va fi $a=12$ și atunci $n=(8068-12):4+1=2015$. 2p

b) Suma elementelor lui M este $(a+b)\cdot n:2=4040n$, deci media aritmetică a elementelor lui M este $4040n:n=4040$. 2p

Numărul 4040 se divide cu 4 și este cuprins între a și b, deci este element al mulțimii M. 1p

Problema 3. Pe semidreapta $(OB$ se consideră punctele $A_1, A_2, ..., A_k, ...$ astfel încât $OB = 2\text{ cm}$, $OA_1 = 1\text{ cm}$ și $A_nA_{n+1} = \frac{1}{2^n}\text{cm}$, oricare ar fi numărul natural nenul n.

a) Care este cea mai mare lungime posibilă a segmentului A_1A_{10}? Dar cea mai mică?

b) Arătați că, indiferent de modul lor de așezare (în condițiile problemei), toate punctele A_n $(n \in \mathbb{N}^*)$ aparțin segmentului (OB).

Soluție și barem

a) $(A_1A_{10})_{\max} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^9} = 1 - \frac{1}{2^9} = \frac{511}{512}\text{cm}$ 2p

$(A_1A_{10})_{\min} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^9}\right) = \frac{1}{2^9} = \frac{1}{512}\text{cm}$ 2p

b) Punctul A_1 este mijlocul segmentului (OB). Trebuie arătat că, indiferent de modul de așezare a punctelor (în condițiile problemei), lungimea maximă a segmentului A_1A_n este mai mică de 1cm (unde n este oarecare). 2p

$A_1A_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 1\text{cm}$ 1p

Problema 4.. Determinați numărul fracțiilor ireductibile și subunitare care au suma dintre numărător și numitor egală cu 2015.

Soluția 1 și barem

Vom afla mai întâi numărul fracțiilor reductibile și subunitare care au suma dintre numărător și numitor egală cu 2015; notăm cu M mulțimea acestor fracții. Elementele lui M sunt de forma $\frac{a}{2015-a}$, unde $a \in \{1, 2, ..., 1007\}$ și fie $d \geq 2$ un număr prin care se simplifică o astfel de fracție. Din $d \mid a$ și $d \mid 2015 - a$ deducem că $d \mid 2015$. Observăm că $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$. 3p

Notăm cu A, B și C submulțimile lui M formate din fracțiile care se simplifică prin 5, 13 respectiv 31. Trebuie să determinăm $|A \cup B \cup C|$. Avem (folosind, eventual, o diagramă): $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 201 + 77 + 32 - 15 - 6 - 2 + 0 = 287$ 3p

Numărul fracțiilor ireductibile și subunitare care au suma dintre numărător și numitor egală cu 2015 este $|M| - |A \cup B \cup C| = 1007 - 287 = 720$. 1p

Soluția 2 și barem

Fie $\frac{a}{b}$ o fracție ireductibilă, având suma dintre numărător și numitor egală cu 2015. Din $(a,b)=1$ rezultă că $(a,a+b)=1$, adică $(a,2015)=1$. Observăm că $2015=5\cdot13\cdot31$. 3p

Numărul numerelor naturale mai mici ca 2015 și relativ prime cu 2015 este dat de indicatorul lui Euler: $\varphi(2015)=2015\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{13}\right)\left(1-\frac{1}{31}\right)=1440$, deci există 1440 fracții ireductibile care au suma dintre numărător și numitor egală cu 2015. .... 3p

Dintre acestea, jumătate sunt subunitare și jumătate sunt supraunitare, deci numărul fracțiilor cerute în enunț este $1440:2=720$. 1p

Notă: Orice altă soluție corectă sau demers de rezolvare corect se va puncta corespunzător.